早稲田大学　理工

I

(1) $C: y = f(x) = 3e^x - 6$

$D: y = g(x) = e^{2x} - 4e^x$

$f'(x) = 3e^x > 0$ より $f(x)$ は単調増加し、

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -6$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ である。

$g'(x) = 2e^{2x} - 4e^x = 2e^x(e^x - 2)$ より

$g(x)$ は $x \leq \log 2$ で単調減少、$x \geq \log 2$ で単調増加し

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$ である。

C, D の共有点の x 座標は

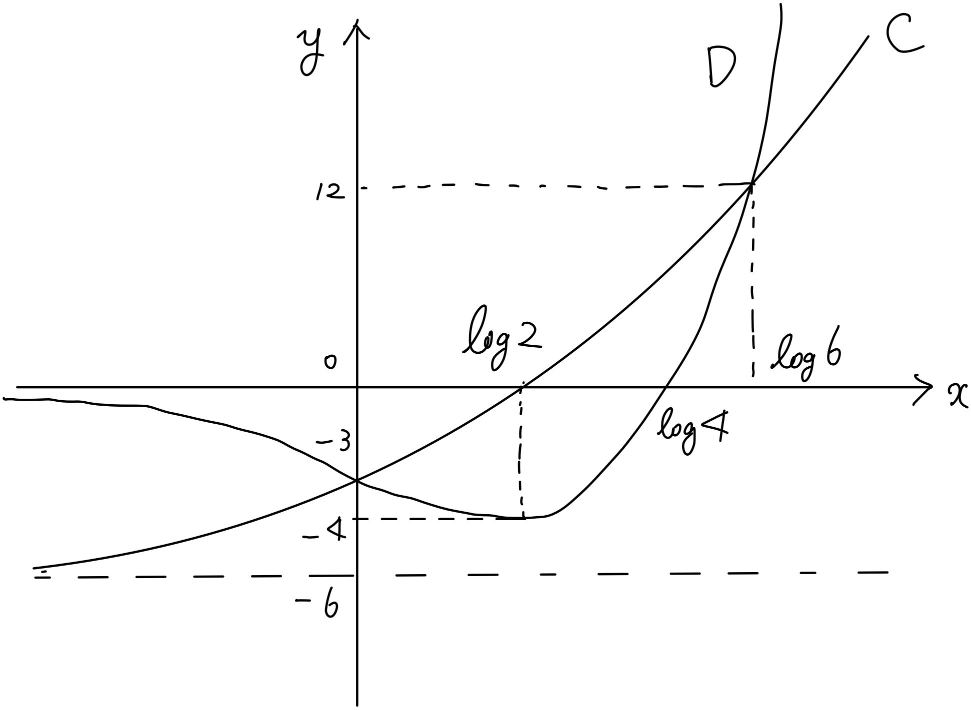
$3e^x - 6 = e^{2x} - 4e^x$

$(e^x - 1)(e^x - 6) = 0$

$\therefore x = 0, \log 6$

慶早進学塾

以上のことからグラフの概形は以下の通り



(2)

$$S = \int_0^{\log 6} \left((3e^x - 6) - (e^{2x} - 4e^x) \right) dx$$

$t = e^x$ と変数変換すると、 $dx = \frac{1}{t} dt$

$$\therefore \quad S = \int_1^6 (-t^2 + 7t - 6) \cdot \frac{1}{t} dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2}t^2 + 7t - 6\log t \right]_1^6$$

$$= \frac{35}{2} - 6\log 6$$

慶早進学塾

(3) $f(x) = -g(x)$ となるとき、

$x = \log 3$ より

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^{\log 3} \left(g(x)\right)^2 dx + \int_{\log 3}^{\log 6} \left(f(x)\right)^2 dx$$

$$- \int_0^{\log 2} \left(f(x)\right)^2 dx - \int_{\log 4}^{\log 6} \left(g(x)\right)^2 dx$$

$t = e^x$ と変数変換し、

$$\frac{V}{\pi} = \int_1^3 \left(t^3 - 8t^2 + 16t\right) dt + 9\int_3^6 \left(t - 4 + \frac{4}{t}\right) dt$$

$$- 9\int_1^2 \left(t - 4 + \frac{4}{t}\right) dt - \int_4^6 \left(t^3 - 8t^2 + 16t\right) dt$$

$$= 36$$

$$\therefore \ V = 36\pi$$

慶早進学塾

II

(1) x^2 の係数が1であり、

$f(x)$ は整数解をもつため、

$f(x)=(x-m)(x-n)$ （m, n；整数）とおける

$\therefore\ f(1)=(m-1)(n-1)=pq$.

p, q は素数のため、

$(m-1, n-1)=(\pm pq, \pm 1), (\pm 1, \pm pq)$

$(\pm p, \pm q), (\pm q, \pm p)$ （複号同順）

$\therefore\ (m, n)=(pq+1, 2), (-pq+1, 0), (p+1, q+1), (-p+1, -q+1),$

$(2, pq+1), (0, -pq+1), (q+1, p+1), (-q+1, -p+1)$

$\therefore\ f(x)=x^2-(pq+3)x+2(pq+1),$

$x^2-(-pq+1)x,$

$x^2-(p+q+2)x+(p+1)(q+1),$

$x^2-(-p-q+2)x+(p-1)(q-1)$

慶早進学塾

(2) (1)で求めた$f(x)$を順に$f_1(x), \dots, f_4(x)$とする。

$f_i(x)=0$ の解を $x=m_i, n_i$ とおくと、

p, q は相異なる素数のため、

(1)から、$m_1, \dots, m_4, n_1, \dots, n_4$ は

互いに異なる整数であると分かる

よって $f_1(x)f_2(x)f_3(x)f_4(x)=0$ の

相異なる解の総和は、

$$\sum_{i=1}^{4}(m_i+n_i)$$

$$=(pq+3)+(-pq+1)+(p+q+2)+(-p-q+2)$$

$$=8.$$

このため、これは p, q に依らない。□

慶早進学塾

Ⅲ

(1) $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{7}{12}$ $\quad \therefore \; b_{n+1} - \frac{7}{6} = \frac{1}{2}\left(b_n - \frac{7}{6}\right)$

このため，$b_n = \left(r - \frac{7}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{7}{6}$

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{7}{6}$

$c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + \frac{5}{6}$ $\quad \therefore \; c_{n+1} - \frac{5}{3} = \frac{1}{2}\left(c_n - \frac{5}{3}\right)$

このため，$c_n = \left(r - \frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{5}{3}$

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{5}{3}$

(2) nについての数学的帰納法で示す.

[i] $n = 1$ のとき，

$b_1 = a_1 = c_1 = r$ より，成立する

[ii] $b_n \leqq a_n \leqq c_n$ と仮定したとき，

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{4}[a_n] + \frac{1}{4}a_n + \frac{5}{6} \\
&> \frac{1}{4}(a_n - 1) + \frac{1}{4}a_n + \frac{5}{6} \\
&= \frac{1}{2}a_n + \frac{7}{12} \\
&\geqq \frac{1}{2}b_n + \frac{7}{12} = b_{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{4}[a_n] + \frac{1}{4}a_n + \frac{5}{6} \\
&\leq \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}a_n + \frac{5}{6} \\
&= \frac{1}{2}a_n + \frac{5}{6} \\
&\leq \frac{1}{2}c_n + \frac{5}{6} = c_{n+1}
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq c_{n+1}$$

[i][ii]より、任意の整数 n に対して、$b_n \leq a_n \leq c_n$

□

(3) (1),(2)より n が十分大きいとき、$1 < a_n < 2$

$$\therefore\ [a_n] = 1.$$

このため、$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{13}{12}$

$$\therefore\ a_{n+1} - \frac{13}{9} = \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{13}{9}\right)$$

以上から、n が十分大きいところでは、

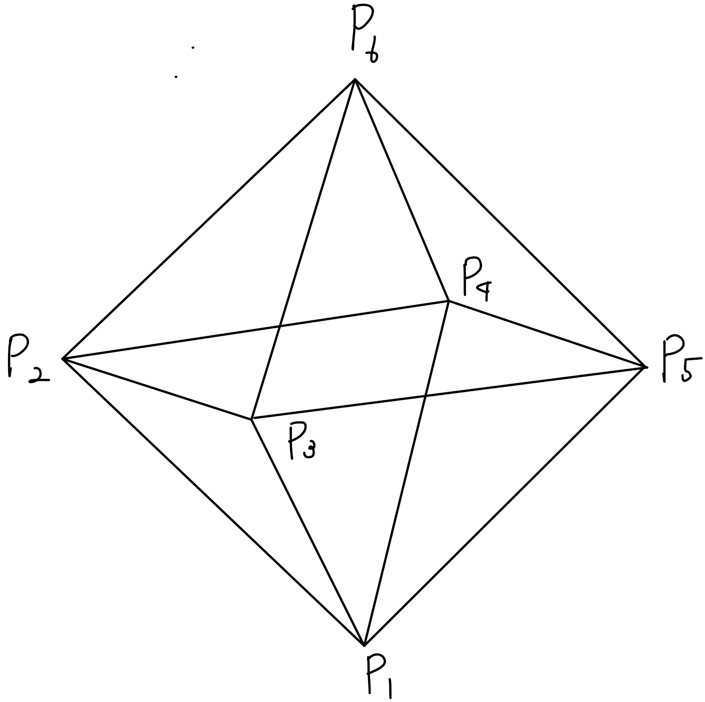
数列 $\left\{a_n - \frac{13}{9}\right\}$ は公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列と分かる.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{13}{9}\right) = 0 \qquad \therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{13}{9}$$

慶早進学塾

IV

(1)



$$V_2 = 2X - Y.$$

$$V_3 = 3X - 3Y + Z$$

$B_1' = B_1 \cup B_6$, $B_2' = B_2 \cup B_5$, $B_3' = B_3 \cup B_4$ とすると.

B_1', B_2', B_3' の体積は $2X$

$B_1' \cap B_2'$, $B_2' \cap B_3'$, $B_3' \cap B_1'$ の体積は $4Y$

$B_1' \cap B_2' \cap B_3'$ の体積は $8Z$

このため. $V_3 = 6X - 12Y + 8Z$

よって

$n=2$ のとき. $(a, b, c) = (2, -1, 0)$

$n=3$ のとき. $(a, b, c) = (3, -3, 1)$

$n=6$ のとき. $(a, b, c) = (6, -12, 8)$

(2) $k = 1+\sqrt{3}$ とおく.

四角錐 $P_6 - P_2P_3P_4P_5$ に対して.

その表面積 S. 体積 V, 内接球の半径 r は.

$$\frac{1}{3}Sr = V$$ を満たす.

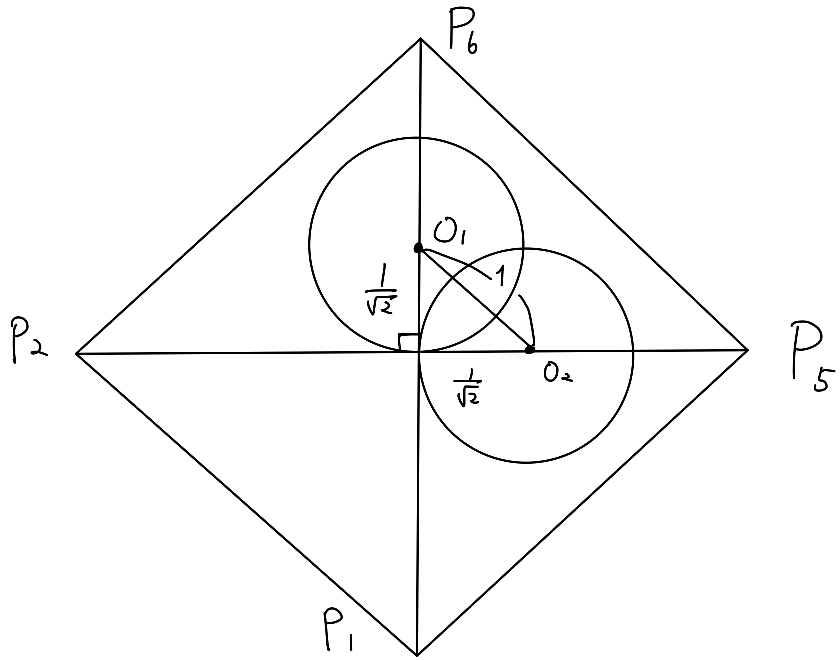
$$\therefore \frac{1}{3}(1+\sqrt{3})k^2 r = \frac{\sqrt{2}}{6}k^3$$

$$\therefore r = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

このため $X = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi$

慶早進学塾

(3) P_1, P_2, P_6, P_5 を通る平面で図形を切断すると、以下の通り
ただし、B_1, B_2 の中心をそれぞれ O_1, O_2 とした。



よって $O_1O_2 = 1$.

このため、V_2 は、
xy 平面上の領域 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \leq y \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ を
x 軸で回転させた立体の体積の2倍に等しい

$$\therefore\ V_2 = 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} - x^2 \right) dx = \frac{4\sqrt{2} + 5}{12} \pi$$

慶早進学塾

V 真数条件より $x>0$ である。

(1) $s=-a\log x$ とすると、$a>0$ より

$$\lim_{x\to+0} x^a\log x = \lim_{s\to\infty}\left(-\frac{s}{a}e^{-s}\right)$$

$$= \lim_{s\to\infty}\left(-\frac{1}{a}\cdot \underbrace{se^{-s}}_{\to 0}\right) = 0$$

(2) $y=f(x)$ は $x=1$ で x軸と交わる。

また、

$$f'(x) = x^{a-1}(a\log x+1)$$

$$f''(x) = x^{a-2}(a(a-1)\log x+2a-1)$$ である。

$y=f(x)$ が x軸上に変曲点をもつとき、

$$f''(1) = 2a-1 = 0 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{2}$$

このとき $f^{(3)}(x) = x^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{8}\log x-\frac{1}{4}\right)$

$\therefore\ f^{(3)}(1) = -\frac{1}{4}<0$ となり

$(1,0)$ は $y=f(x)$ の変曲点となる。 $\therefore\ a=\frac{1}{2}$

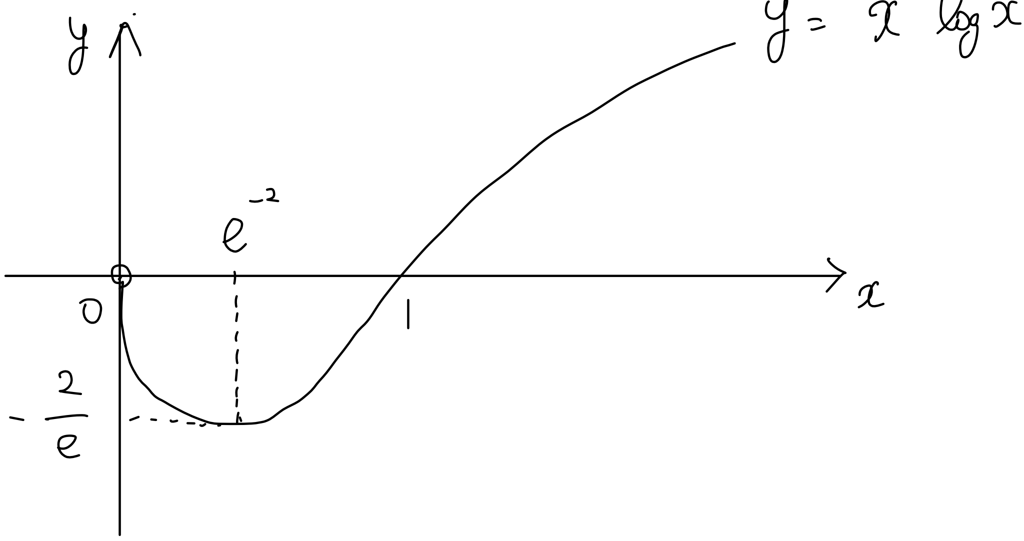
慶早進学塾

$y = f(x)$ の増減は以下の通り

x	0	$\cdots$	e^{-2}	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	極小 $-\frac{2}{e}$	↗	変曲点 0	↗

また、$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to +0} f(x) = 0$.

このときのグラフの概形は以下の通り



慶早進学塾

(3) $(t, f(t))$ における接線 l の方程式は、

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

$$\therefore \quad y = f'(t)x - tf'(t) + f(t)$$

このため、l が y 軸の負の部分と交わるとき、

$$-tf'(t) + f(t) < 0$$

$$\therefore -t^a(a\log t + 1) + t^a \log t < 0$$

$t^a > 0$ より　$(a-1)\log t + 1 > 0$

これを満たすのは、

$$\begin{cases} 0 < a < 1 & \text{かつ} \quad 0 < t < e^{-\frac{1}{a-1}} \\ a = 1 & \text{かつ} \quad 0 < t \\ 1 < a & \text{かつ} \quad e^{-\frac{1}{a-1}} < t \end{cases}$$

のとき。

ここで、$g(a) = e^{-\frac{1}{a-1}}$ とおくと、

$$g'(a) = (a-1)^{-2} e^{-\frac{1}{a-1}} > 0$$

$$g''(a) = -(2a-3)(a-1)^{-4} e^{-\frac{1}{a-1}} \quad \therefore g''(a)=0 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

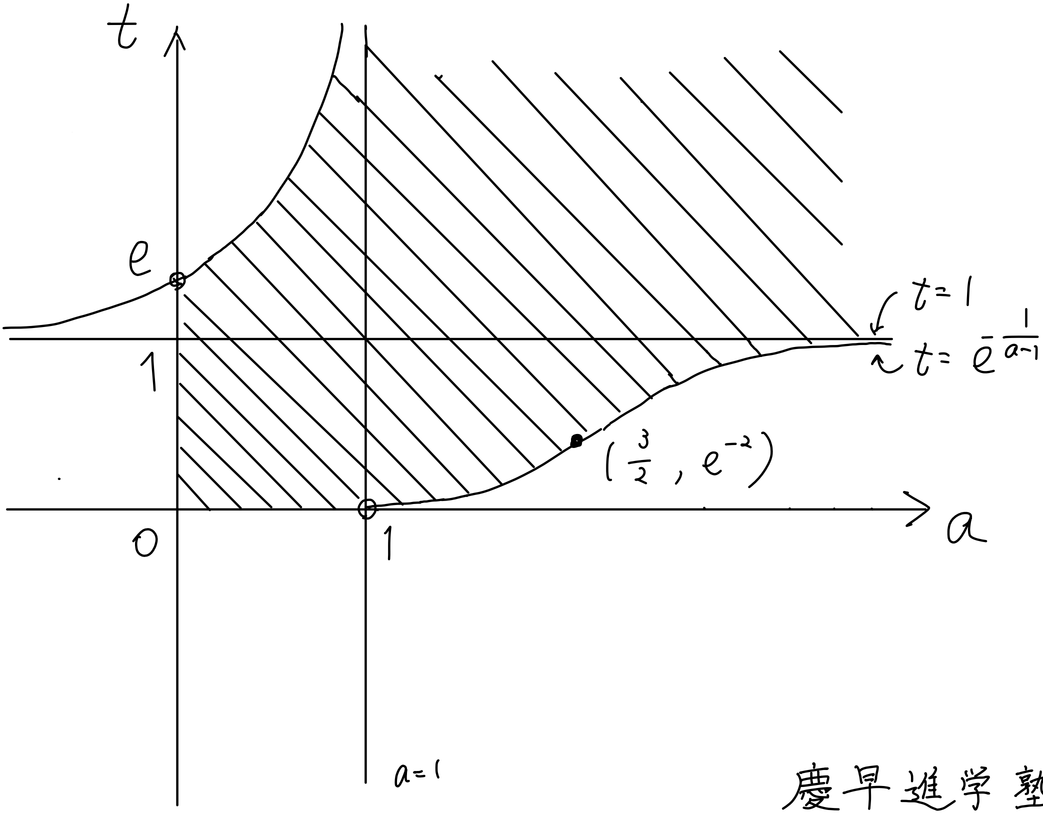
$$\lim_{a\to 1-0} g(a) = \infty, \lim_{a\to 1+0} g(a) = 0, \lim_{a\to \pm\infty} g(a) = 1$$

である。

よって、条件は $(a-1)\log t + 1 > 0$ であり、

この領域は以下の斜線部分。

(ただし、境界は含まない)



慶早進学塾