早稲田大学 教育

1

(1) $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP}) = 0$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \left(\overrightarrow{OP} - \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} \right) = 0$$

このため、BCの中点をMとすると

Pは AMを直径とする球面上の点である

よって $|\overrightarrow{AP}|$ は、

$P = M$, つまり $\underline{P(0, 2, 4)}$ となるとき、最大となる

(2)

$$f(t) = 2\pi \int_0^{2t} |x - t| \cos(2\pi x)\, dx - t\sin(4\pi t)$$

$$= 2\pi \left(-\int_0^{t} (x-t)\cos(2\pi x)\, dx + \int_t^{2t} (x-t)\cos(2\pi x)\, dx \right)$$

$$- t\sin(4\pi t)$$

$$= 2\pi\Big(-\int_0^t x\cos(2\pi x)\,dx + t\int_0^t \cos(2\pi x)\,dx$$

$$+\int_t^{2t} x\cos(2\pi x)\,dx - t\int_t^{2t}\cos(2\pi x)\,dx\Big)$$

$$-\ t\sin(4\pi t)$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}f(t) = 2\pi\Big(-t\cos(2\pi t) + t\cos(2\pi t) + \int_0^t \cos(2\pi x)\,dx$$

$$+4t\cos(4\pi t) - t\cos(2\pi t)$$

$$-2t\cos(4\pi t) + t\cos(2\pi t) - \int_t^{2t}\cos(2\pi x)\,dx\Big)$$

$$-\ 4\pi t\cos(4\pi t) - \sin(4\pi t)$$

$$= 2\sin(2\pi t) - 2\sin(4\pi t)$$

$$\therefore\ f(t) = \frac{1}{2\pi}\Big(\cos(4\pi t) - 2\cos(2\pi t) + C\Big) \qquad (C:\text{定数})$$

ここで $f(0) = 0$ より $C = 1$

$$\therefore\ f(t) = \frac{1}{\pi}\cos(2\pi t)\big(\cos(2\pi t) - 1\big)$$

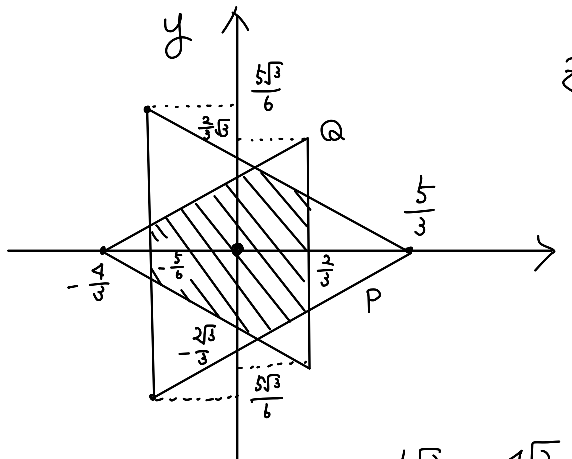
よって $t \in [0, 1]$ で $f(t) = 0$ のとき

$t = 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1$ つまり解は 4つ

慶早進学塾

(3)

$z=\frac{1}{3}$ での P, Q の断面は以下の通り



P, Q の断面はそれぞれ1辺 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$, $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ の正三角形であるから

R の切り口となる. 斜線部分の面積は.

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2-3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)=\underline{\frac{13\sqrt{3}}{12}}$$

(4)

$$\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1800}{(n-5)(n-4)(n-1)n}$$

$$=\sum_{n=6}^{\infty}450\left(\frac{1}{n(n-5)}-\frac{1}{(n-1)(n-4)}\right)$$

$$=\sum_{n=6}^{\infty}\left(90\left(\frac{1}{n-5}-\frac{1}{n}\right)-150\left(\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-1}\right)\right)$$

慶早進学塾

ここで、

$$\sum_{n=6}^{\infty}\left(\frac{1}{n-5}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{137}{60}$$

$$\sum_{n=6}^{\infty}\left(\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)$$

$$=\frac{13}{12}$$

$$\therefore\ \sum_{n=6}^{\infty}\frac{1800}{(n-5)(n-4)(n-1)n}$$

$$=90\cdot\frac{137}{60}-150\cdot\frac{13}{12}$$

$$=43$$ //

慶早進学塾

$\boxed{2}$

$S = 2^{a}3^{b}5^{c}$ （a, b, c は非負整数）としたとき

S の正の約数は $(a+1)(b+1)(c+1)$ 個である

(1) このとき

$(a, b, c) = (2,0,0), (0,2,0), (0,0,2)$

n 回目までに出た i の目の回数を a_i とすると

$(a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$

$= (2,0,0,0,0), (0,0,1,0,0), (0,2,0,0,0), (0,0,0,2,0)$

よって求める確率は

$n \geqq 2$ で

$$P_3 = {}_nC_2\left(\frac{1}{6}\right)^n + {}_nC_1\left(\frac{1}{6}\right)^n + {}_nC_2\left(\frac{1}{6}\right)^n + {}_nC_2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}n(3n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

これは $n=1$ のときも $P_3 = \dfrac{1}{6}$ となり成立

$$\therefore \underline{P_3 = \frac{1}{2}n(3n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

慶早進学塾

(2) このとき

$(a, b, c) = (3.0.0), (0.3.0), (0.0.3)$

$(0.1.1), (1.0.1), (1, 1, 0)$

このため．

$(a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$

$= (3, 0, 0.0.0), (1, 0, 1, 0, 0), (0, 3, 0\ 0.0)$

$(0.0.0.3.0), (0, 1, 0, 1.0), (1, 0.0, 1, 0)$

$(1, 1.0.0.0), (0, 0, 0, 0, 1)$

よって $n \geqq 3$ のとき

$$P_4 = \left(3 \cdot {}_nC_3 + 4 \cdot {}_nC_1 \, {}_{n-1}C_1 + {}_nC_1\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2} n (n^2 + 5n - 4)\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

これは $n = 1, 2$ のときも成立

$$\therefore P_4 = \frac{1}{2} n (n^2 + 5n - 4)\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$\boxed{3}$

(1) 直線 ℓ の方程式は

$$(q-1)x+py-p=0$$

これと O との距離は $\dfrac{|p|}{\sqrt{p^2+(q-1)^2}}$ のため.

$$D_1=\frac{\pi p^2}{p^2+(q-1)^2}$$

(2) OB の垂直二等分線の方程式は

$$px+qy-\frac{1}{2}(p^2+q^2)=0$$

$\triangle OAB$ の外心は, これと $y=\dfrac{1}{2}$ との交点より

その座標は $\left(\dfrac{p^2+q^2-q}{2p},\ \dfrac{1}{2}\right)$

よって

$$D_2=\frac{\pi\left((p^2+q^2-q)^2+p^2\right)}{4p^2}$$

$$\therefore\ D_1D_2=\frac{\pi^2\left((p^2+q^2-q)^2+p^2\right)}{4\left(p^2+(q-1)^2\right)}$$

慶早進学塾

$$= \frac{\pi^2}{4}(p^2+q^2)$$

ここで、(p, q) は

$(2, 2\sqrt{3})$ を中心とする半径 1 の円周上の点より、

$$4-1 \leqq \sqrt{p^2+q^2} \leqq 4+1$$

このため、

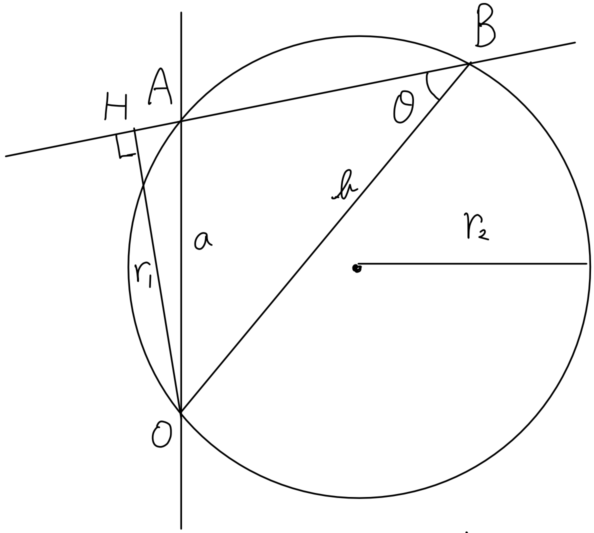
$D_1 D_2$ の最小値は $\frac{9}{4}\pi^2$

最大値は $\frac{25}{4}\pi^2$

//

慶早進学塾

[別解] D_1D_2 を、次のように求めても良い.



D_1, D_2 の半径をそれぞれ r_1, r_2 とする.

$\triangle OAB$ について、正弦定理より

$$2r_2 \sin\angle OBA = OA$$

$$\therefore\ 2r_2 \cdot \frac{r_1}{OB} = OA$$

$$\therefore\ r_1 r_2 = \frac{1}{2} OA \cdot OB$$

$$\therefore\ D_1D_2 = \pi^2 r_1^2 r_2^2$$

$$= \frac{\pi^2}{4} OA^2 OB^2$$

$$= \frac{\pi^2}{4}(p^2+q^2)$$

(以下略)

慶早進学塾

4

(1) $f'_{a,b}(x) = 3x^2 + 6ax + 3b$

$f_{a,b}(x)$ が極値をもつとき.

x の2次方程式 $f'_{a,b}(x) = 0$ の判別式 $D_1 > 0$

$\therefore\ a^2 - b > 0$

同様に, $g_{a,b}(x)$ が極値をもつとき,

$g'_{a,b}(x) = 24x^2 + 6bx + 3a = 0$ の

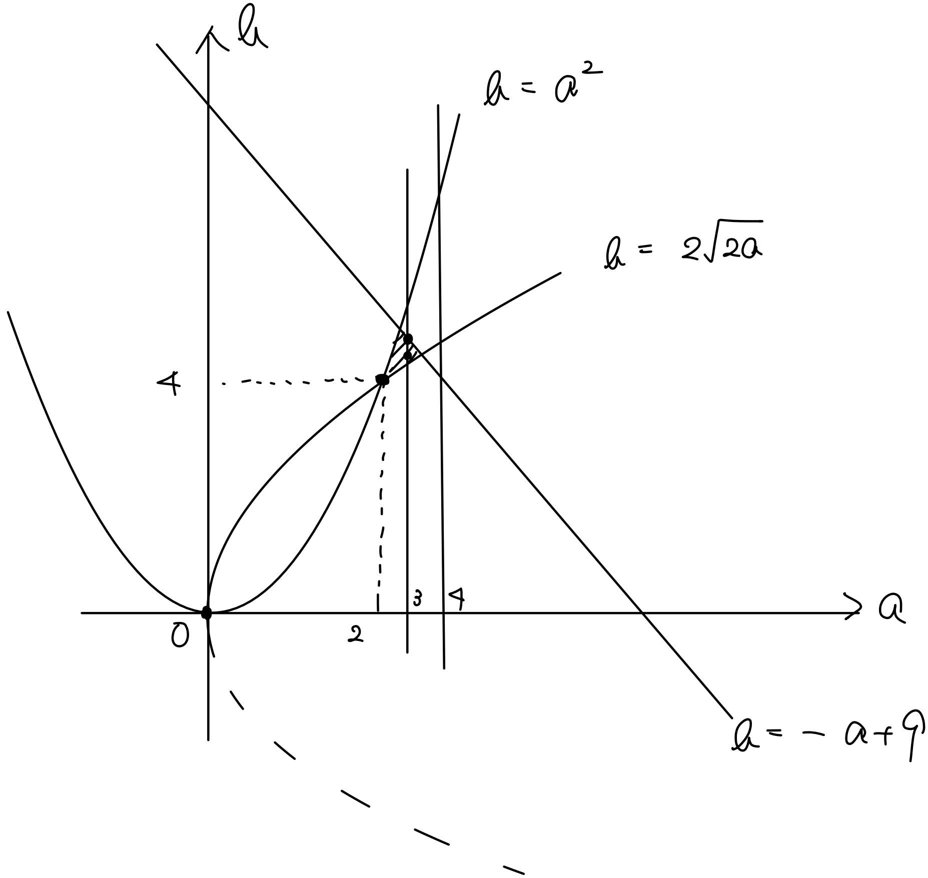
判別式 $D_2 > 0$

$\therefore\ b^2 - 8a > 0$

$a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ a + b \leqq 9$ より

これを満たす (a, b) は以下の斜線部分に含まれる.

ただし, 境界のうち $b = a^2$, $b = 2\sqrt{2a}$ は含まない.



ここで、$3 \leq a$ のときのみ考えれば良いが.

・$a = 3$ のとき $2\sqrt{6} < b \leq 6$ より $b = 5, 6$.

・$a > 4$ のとき $-a + 9 < 2\sqrt{2a}$ より

これを満たす b は存在しない

$\therefore (a, b) = (3, 5), (3, 6)$ //

慶早進学塾

(2) $f_{a,b}(0)=8\neq 0$, $g_{a,b}(0)=1\neq 0$ より,

$f_{a,b}(x)=0$, $g_{a,b}(x)=0$ は, $x=0$ を解にもたない

特に $\alpha, \beta, \gamma\neq 0$ である.

また, $x\neq 0$ の範囲で,

$g_{a,b}(x^{-1})=x^{-3}f_{a,b}(x)$ より,

$f_{a,b}(x)=0$ ならば $g_{a,b}(x^{-1})=0$

このため, $g_{a,b}(x)=0$ の 3つの解は,

$x=\underline{\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1}}$ //

慶早進学塾

(3)

(Ⅲ) のとき, $f_{a,b}(x)$ は極値をもつため, (Ⅰ) を満たす.

また, (2) より $g_{a,b}(x)$ も相異なる実数解をもつため

$g_{a,b}(x)$ は極値をもち, (Ⅱ) も満たされる.

よって (1) より (Ⅲ) の必要条件は

$$(a, b) = (3, 5), (3, 6)$$

ここで, $f_{3,5}(x) = x^3 + 9x^2 + 15x + 8$

$$f'_{3,5}(x) = 3(x+1)(x+5)$$

$\therefore$ $f'_{3,5}(x) = 0$ のとき, $x = -5, -1$

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'_{3,5}(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f_{3,5}(x)$	$\nearrow$	33	$\searrow$	1	$\nearrow$

このため, $f_{3,5}(x) = 0$ の実数解は1つとなり

$(a, b) = (3, 5)$ は (Ⅲ) を満たさない.

慶早進学塾

$f_{3,6}(x) = x^3 + 9x^2 + 18x + 8$ において

$\lim_{x \to -\infty} f_{3,6}(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f_{3,6}(x) = \infty$

$f_{3,6}(-5) = 18 > 0$, $f_{3,6}(-1) = -2 < 0$.

$f_{3,6}$ は連続のため、中間値の定理から

$f_{3,6}(x)=0$ は少なくとも3つの相異なる実数解をもつ

しかし、$f_{3,6}(x)=0$ は3次方程式より、解は高々3つである

このため $(a, b) = (3, 6)$ は (Ⅲ) を満たす。

$\therefore$ $\underline{(a, b) = (3, 6)}$ //

慶早進学塾