

早稲田大学 商学部

1

(1) (i) より $a_1 > 0, a_2 > 0$

(ii) より $a_n > 0$ から $a_{n+1} > 0$ かつ $a_{n+2} > 0$ であり、

数学的帰納法から、任意の $n \geq 1$ について $a_n > 0$.

よって (ii) から、

$$\log_2 a_{n+2} = (\log_2 a_{n+1}) \cdot (\log_2 a_n)$$

$$\therefore \log_2 (\log_2 a_{n+2}) = \log_2 (\log_2 a_{n+1}) + \log_2 (\log_2 a_n)$$

ゆえに (i) より $h_n := \log_2 (\log_2 a_n)$ は順に求めていくと、

$$h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 2, h_4 = 3, h_5 = 5,$$

$$h_6 = 8, h_7 = 13, h_8 = 21, h_9 = 34, h_{10} = 55$$

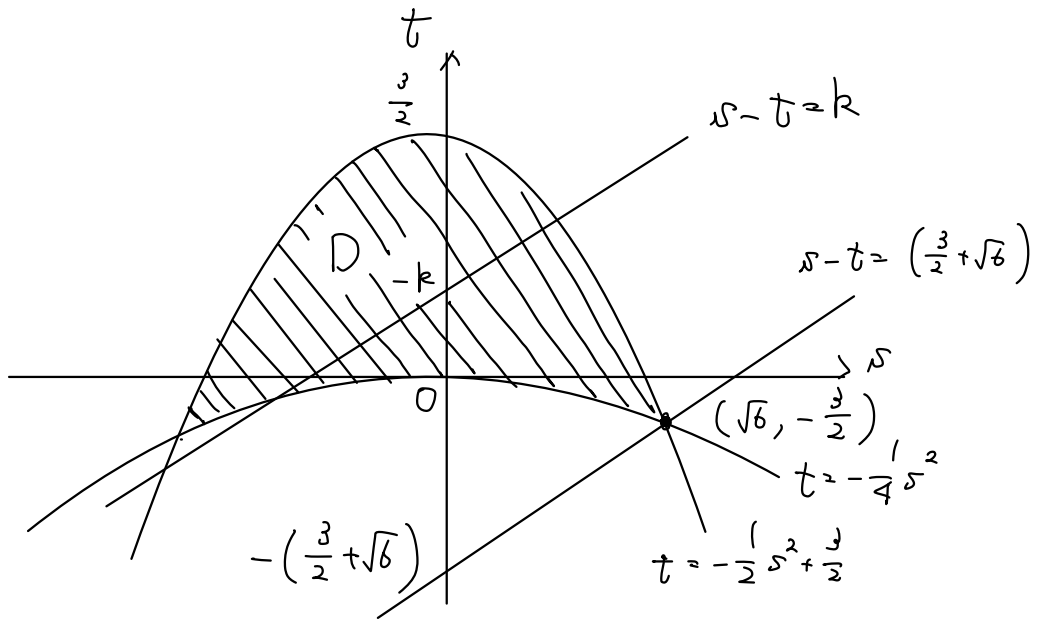
$$\log_2 (\log_2 a_{10}) = \underline{55}$$

(2) $s = x - y$. $t = xy$ とおくと、

このとき 条件より $s^2 + 2t \leq 3$

また、 $(x+y)^2 = s^2 + 4t \geq 0$

この表す領域 D は以下の斜線部分 (但し境界を含む)



ここで $x - y - xy = s - t = k$ とおくと

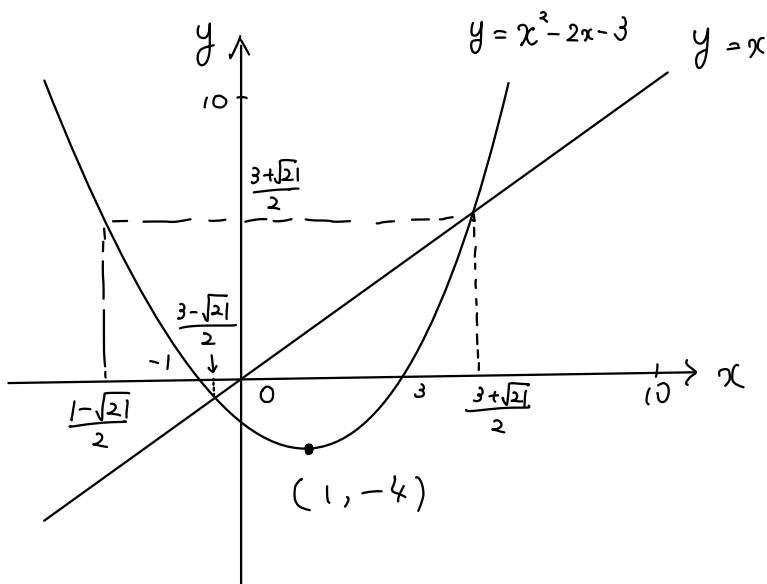
これは傾き 1. y切片 $-k$ の直線を表す

このため、 $(s, t) = (\sqrt{6}, -\frac{3}{2})$ を k は最大とす

このとき $k = \frac{3}{2} + \sqrt{6}$

(3)

$y = x^2 - 2x - 3$, $y = x$ のグラフは以下の通り



∴

• $a = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$ a とす.

$n \geq 2$ として $a_n = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$ とす. $a_n \leq 10$ とおける.

• $a < \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$ a とす, $\frac{3 + \sqrt{2}}{2} < a_2$ とす.

$a_n > \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$ とす. $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n - 3 > a_n$ ($> \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$)

∴ 帰納的に $a_{n+1} > a_n$ がいえる

このため、数列 $\{a_n\}$ は単調増加する

これが α に収束するならば

$$\alpha = \alpha^2 - 2\alpha - 3 \quad \text{より} \quad \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2} \quad \text{とわかる}$$

$a_n > \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$ より、この単調増加数列は収束しない。

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

よって 十分大きい n について $10 < a_n$

以上のことから、任意の n で $a_n \leq 10$ とわかる

a の最小値 は $\frac{1 - \sqrt{21}}{2}$

(4) $f'(x) = a(x-1)(x-2)$ とおける (a : 定数)

このとき

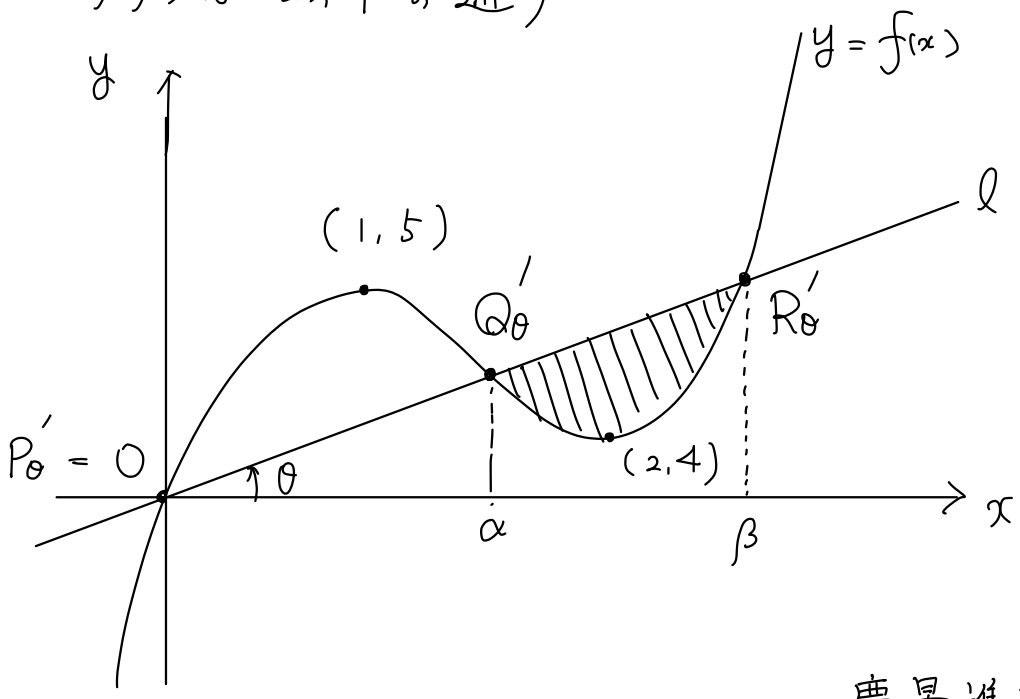
$$f(x) = a\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right) + C \quad (C: \text{定数})$$

と仮定し、 $f(1) = 5, f(2) = 4$ より、

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$$

x 軸, $P_\theta, Q_\theta, R_\theta$ を反時計回りに θ 回転したものをそれぞれ $l, P'_\theta, Q'_\theta, R'_\theta$ とすると、

グラフは以下の通り



よ、 z . Q'_0 , R'_0 の x 座標 ε z ε z ε α, β と可 ε .

$$-\int_{\alpha}^{\beta} 2x(x-\alpha)(x-\beta) dx = \frac{81}{32}$$

$$\therefore -\frac{1}{6} \left\{ 3(\beta^4 - \alpha^4) - 4(\alpha + \beta)(\beta^3 - \alpha^3) + 6\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2) \right\} = \frac{81}{32}$$

$$\therefore \frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3 (\beta + \alpha) = \frac{81}{32}$$

こ ε z . $l: y = mx$ と可 ε .

$(2x^3 - 9x^2 + 12) - mx = 0$ の解は $x = 0, \alpha, \beta$ である。

解と係数との関係より、 $\alpha + \beta = \frac{9}{2}$,

$\beta - \alpha$ は実数のため、 $\beta - \alpha = \frac{3}{2} \quad \therefore \alpha = \frac{3}{2}$

よ、 z Q'_0 の座標は $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$

よ、 z Q_0 の x 座標は $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$

2

< は辞書式順序 であるから、 $0 \leq n \leq m$ について、

$\vec{p}_m = (x, y, z)$ のとき、 $n-1$ の 8進法表記は $\alpha\beta\gamma$ (8)

$$(1) \quad 66 = 1 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8 + 2 \text{ より}$$

$$66 = 102(8)$$

$$\therefore \text{at}\alpha. \quad \vec{p}_{67} = \underline{(1, 0, 2)}$$

$$(2) \quad \vec{p}_n = (x, y, z) \perp (1, 0, -2)$$

$$\therefore x - 2z = 0$$

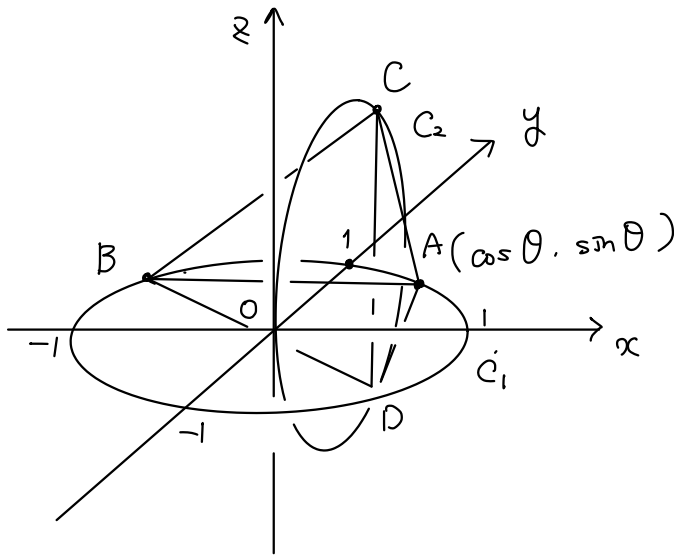
これに満たす $\vec{p}_n \in P$ の n の最大となるとき、

$$(x, y, z) = (6, 7, 3)$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{このとき、} \quad n &= 6 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 3 + 1 \\ &= \underline{444} \end{aligned}$$

(2) C_1 上に 3 頂点があるとき, 残り の 頂点 は $(0, 0, \pm 1)$
 しか, これは $C_1 \cup C_2$ 上 に 7 点 ため 不適.
 同様に, C_2 上に 3 頂点 がある ことも なく.

頂点 は C_1 上に 2 つ, C_2 上に 2 つ あり



正四面体 $ABCD$ について. $A, B \in C_1, C, D \in C_2$ とする.

AB の垂直二等分面は、 z 軸を通る平面だが、
この C_2 と C_1 の $z > 0$ と $z < 0$ の 2 つの共有点 C, D がある?

このため. $A(\cos \theta, \sin \theta, 0)$

$B(-\cos \theta, \sin \theta, 0)$ とおける

また、同様にして. $C(0, 1 + \sin \eta, \cos \eta)$

$D(0, 1 + \sin \eta, -\cos \eta)$ とおけるが、

$AB = CD$ より、

$A(\cos \theta, \sin \theta, 0)$

$B(-\cos \theta, \sin \theta, 0)$

$C(0, 1 \pm \sin \theta, \cos \theta)$

$D(0, 1 \pm \sin \theta, -\cos \theta)$ (複号同順)

とおける.

ABの中心と、CDの中心間の距離は、

1辺の長さの $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍 である。

$$\pm \left(\sin \theta - (1 \pm \sin \theta) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \cos \theta$$

(複号任意)

$$\therefore \cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{または} \quad 1 - 2 \sin \theta = \pm \sqrt{2} \cos \theta \quad \text{--- ②}$$

② のとき、

$$(1 - 2 \sin \theta)^2 = 2(1 - \sin^2 \theta)$$

$$\therefore 6 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta - 1 = 0$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{6}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\pm \sqrt{2} \pm 2\sqrt{5}}{6} \quad (\text{複号任意})$$

以上より 1辺の長さ a は

$$a = 2 \left| \cos \theta \right| = \sqrt{2}, \quad \frac{2\sqrt{5} \pm \sqrt{2}}{3}$$