早稲田大学 人間科学部

問1

(1) $a_1=1$, $a_2=0$, $a_3=1$, $a_4=0$, $a_5=1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{5} a_k 2^{k-1} = 1+4+16 = \underline{21}$$

(2) $y=ax^2+bx+c$ は 2次関数. $\therefore a \neq 0$

グラフが原点を通るとき, $c=0$

このとき $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a}$ より

頂点は $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2}{4a}\right)$

これが第1 or 第3象限にあるとき,

$$\left(-\frac{b}{2a}\right)\left(-\frac{b^2}{4a}\right)>0 \quad \therefore b>0$$

つまり $b=1, 2, 3, 4, 5$

よって, 条件を満たす (a, b, c) の組は

$$1 \times 5 \times 7 = \underline{35} \ (\text{組})$$

慶早進学塾

(3) $5a^2-5b^2+6bc-5c^2=0$

$\therefore\ b^2+c^2-a^2=\dfrac{6}{5}bc$

$\therefore\ \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{3}{5}$

$\therefore\ \sin A=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}\quad(\because \sin A>0)$

$\therefore\ \sin 2A+\cos 2A$

$=2\sin A\cos A+2\cos^2 A-1$

$=\dfrac{17}{25}$

問2

$$(\text{左辺}) = 2\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta + 2(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) - 4\sin\theta\cos^2\theta$$

$$= 2\sin\theta(4 + \cos\theta - 4\sin^2\theta - 2\cos^2\theta)$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta(2\cos\theta + 1)$$

$\sin\theta > 0$ より，(左辺) > 0 のとき．

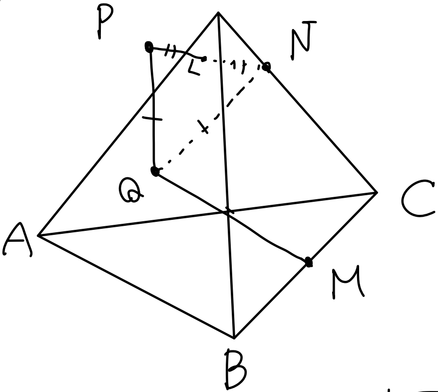
$$\cos\theta < -\frac{1}{2},\ 0 < \cos\theta$$

$0 < \theta < \pi$ より

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi < \theta < \pi$$

慶早進学塾

問3



$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

である。

ここで、

$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + u\overrightarrow{OC}$ とすると (s, t, u 実数)

$\overrightarrow{NP} \perp \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{NP} \perp \overrightarrow{OB}$ であり、

NP の中点は $\triangle OAB$ 上にあることから

$$\begin{cases} s + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{3}\right) = 0 \\ \frac{1}{2}s + t + \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{3}\right) = 0 \\ u + \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore\ s = \frac{2}{9},\ t = \frac{2}{9},\ u = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = \frac{2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}}{9}$$

$$|\overrightarrow{MQ}| + |\overrightarrow{QN}| = |\overrightarrow{MQ}| + |\overrightarrow{QP}|$$ のため、

Q が 直線 MP 上にあるとき 最小となる。

このため、$\overrightarrow{OQ} = (1-k)\overrightarrow{OM} + k\overrightarrow{OP}$ (k: 実数) とおける

$$\therefore \overrightarrow{OQ} = \frac{2}{9}k\overrightarrow{OA} + \left(-\frac{5}{18}k + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OB} + \left(-\frac{5}{6}k + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OC}$$

$\overrightarrow{OQ}$ は平面 OAB 上の点より

$$-\frac{5}{6}k + \frac{1}{2} = 0 \quad \therefore k = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \overrightarrow{OQ} = \frac{2\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB}}{15}$$

慶早進学塾

問4

$$(x-a)(x-b)(x-c)$$

$$= x^3 - (a+b+c)x + (bc+ca+ab)x - abc$$

$$= x^3 - 3x - abc \quad \text{である}$$

このため、2つのグラフ $\begin{cases} y = x^3 - 3x \\ y = abc \end{cases}$ の

共有点のx座標が a, b, c となる

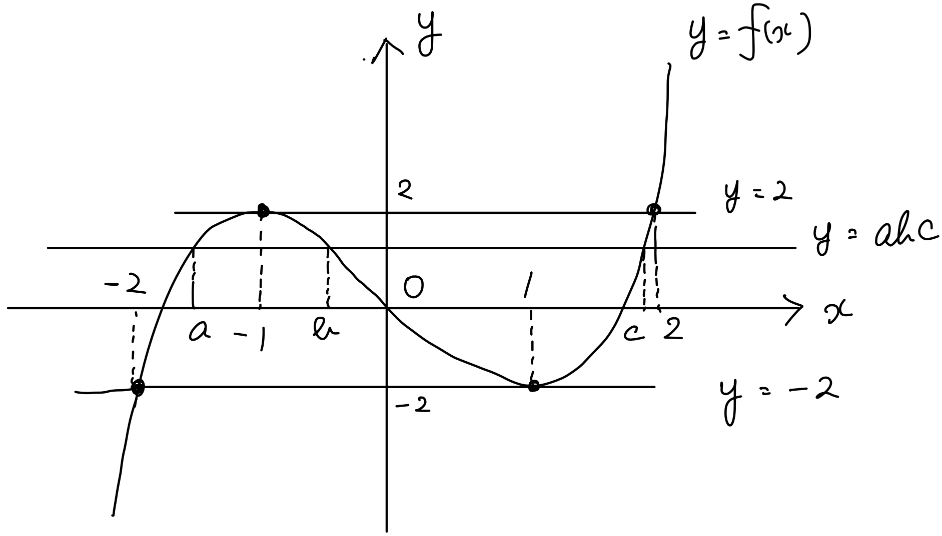
$f(x) = x^3 - 3x$ とすると、

$f'(x) = 3(x-1)(x+1) \quad \therefore f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$y = f(x)$ の増減は以下の通り。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

よってグラフの概形は以下の通り



$\therefore \quad \underline{-2 < abc < 2}$

$\underline{-2 < a < -1 < b < 1 < c < 2}$

問5

$$f(x) = -(x-3)^2 + 9 \quad \text{より.}$$

$$g(a) = \begin{cases} f(a) & (a < 3) \\ 9 & (3 \leqq a \leqq 5) \\ f(a-2) & (5 < a) \end{cases}$$

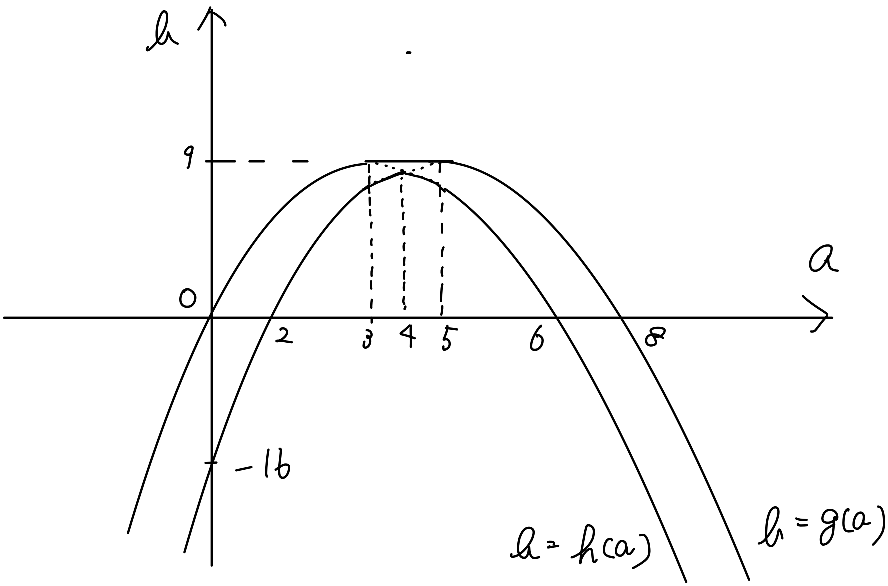
$$= \begin{cases} -a^2 + 6a & (a < 3) \\ 9 & (3 \leqq a \leqq 5) \\ -a^2 + 10a - 16 & (5 < a) \end{cases}$$

$$h(a) = \begin{cases} f(a-2) & (a < 4) \\ f(a) & (4 \leqq a) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -a^2 + 10a - 16 & (a < 4) \\ -a^2 + 6a & (4 \leqq a) \end{cases}$$

となる.

よって $b=g(a)$, $b=h(a)$ のグラフは下のようになる。



よって $b=g(a)$ と a 軸で囲まれた部分の面積は

$$\int_0^3(-a^2+6a)\,da+\int_3^5 9\,da+\int_5^8(-a^2+10a-16)\,da$$

$$=54$$

$b=h(a)$ と a 軸で囲まれた部分の面積は

$$\int_2^4(-a^2+10a-16)\,da+\int_4^6(-a^2+6a)\,da$$

$$=\frac{56}{3}$$

慶早進学塾