慶應義塾大学　総合政策

I

代入して計算すると

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 3$, $a_6 = 3$.

$a_n = 10$ のとき

$$10 \leq \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right] < 11 \qquad \therefore \frac{361}{8} \leq n < \frac{441}{8}$$

ここで n は整数より $46 \leq n \leq 55$

k：整数に対して $a_n = k$ となるのは

$$\frac{1}{2}k(k-1)+1 \leq n \leq \frac{1}{2}k(k+1)$$ のときで

このような n は k 個である。

$$\therefore \sum_{n=1}^{55} a_n = \sum_{k=1}^{10} k^2 = 385$$

慶早進学塾

Ⅱ

(1) 2桁のデコボコ数は $9\cdot 9 = \underline{81}$ 個ある。

(2) $\{n_1, n_2, n_3\} = \{a, b, c\}$ $(0 \leqq a < b < c \leqq 9)$

を満たすデコボコ数は。

(a) を満たすものが、

$$\begin{cases} a \neq 0 \text{ のとき } (n_1, n_2, n_3) = (a, c, b), (b, c, a) \text{ の2通り} \\ a = 0 \text{ のとき } (n_1, n_2, n_3) = (a, c, b) \text{ の1通り} \end{cases}$$

(b) を満たすものは

$(n_1, n_2, n_3) = (b, a, c), (c, a, b)$ の 2通り

存在する。このため、3桁のデコボコ数のうち。

(a) を満たすものは ${}_9C_3 \cdot 2 + {}_9C_2 \cdot 1 = \underline{204}$ 個。

(b) を満たすものは ${}_{10}C_3 \cdot 2 = \underline{240}$ 個 存在する

よって 合計 $\underline{444}$ 個存在する。

慶早進学塾

(3) $\{n_1, n_2, n_3, n_4\} = \{a, b, c, d\}$ $(0 \leq a < b < c < d \leq 9)$

となるとすると，

(a) を満たすとき

$(n_1, n_2, n_3, n_4) = (a, c, b, d), (a, d, b, c), (b, c, a, d)$

$(b, d, a, c), (c, d, a, b)$

(b) を満たすとき，

・$a \neq 0$ ならば

(n_1, n_2, n_3, n_4)

$= (b, a, d, c), (c, a, d, b), (d, a, c, b)$

$(c, b, d, a), (d, b, c, a)$

・$a = 0$ ならば

$(n_1, n_2, n_3, n_4) = (b, a, d, c), (d, a, c, b), (c, a, d, b)$

以上より　4桁のデコボコ数のうち，

(a) を満たすものは，${}_{10}C_4 \cdot 5 = \underline{1050}$ 個

(b) を満たすものは，${}_9C_4 \cdot 5 + {}_9C_3 \cdot 3 = \underline{882}$ 個

合計で $\underline{1932}$ 個存在する

また，4桁のデコボコ数のうち，

最大のものは $\underline{9786}$

最小のものは $\underline{1032}$ である

慶早進学塾

Ⅲ

$$A(k) = \int_0^2 |x(x-k)|\,dx$$ より.

・ $2 \leq k$ のとき.

$$A(k) = \int_0^2 (-x^2+kx)\,dx = 2k - \frac{8}{3}$$

・ $0 < k < 2$ のとき

$$A(k) = \int_0^k (-x^2+kx)\,dx + \int_k^2 (x^2-kx)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}k^3 - 2k + \frac{8}{3}$$

以上より

$$A(k) = \begin{cases} \dfrac{k^3-6k+8}{3} & (0 < k < 2) \\ \dfrac{6k-8}{3} & (k \geq 2) \end{cases}$$

$0<k<2$ の範囲で，$\dfrac{d}{dk}A(k) = k^2-2$．

$k>2$ の範囲で，$\dfrac{d}{dk}A(k) = 2$

$k=2$ のとき，$\dfrac{d}{dk}A(k) = 2$ より．

$$\frac{d}{dk}A(k) = \begin{cases} k^2-2 & (0<k<2) \\ 2 & (k \geq 2) \end{cases}$$

$\therefore$ $\dfrac{d}{dk}A(k) = 0$ のとき $k=\sqrt{2}$ $(\because k>0)$

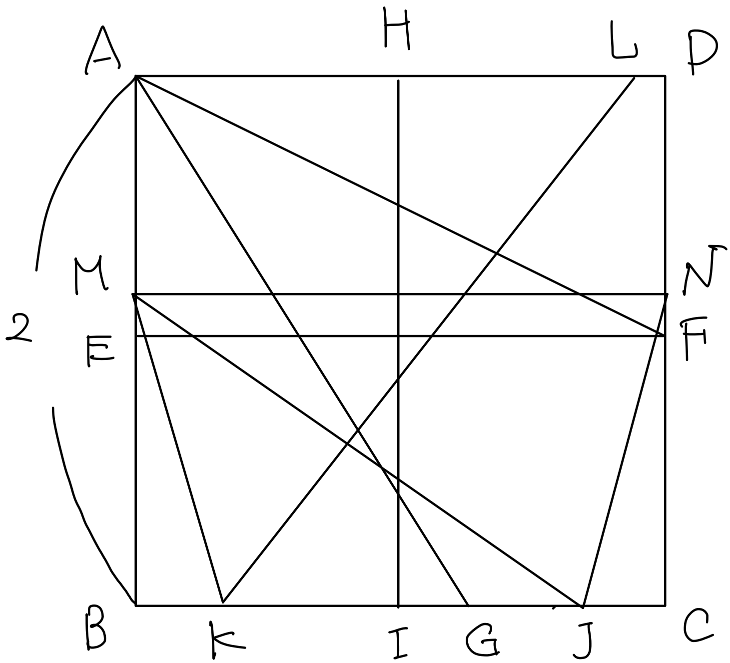
$A(k)$ の増減は以下のようになり．

k	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$\frac{d}{dk}A(k)$		$-$	0	$+$
$A(k)$	0	$\searrow$	$\frac{8-4\sqrt{2}}{3}$	$\nearrow$

$A(k)$ は $k=\underline{\sqrt{2}}$ で最小値 $\underline{\dfrac{8-4\sqrt{2}}{3}}$ をとる

慶早進学塾

IV



$\tan\angle BAG = x$ とおく.

$\tan\angle EAF = \dfrac{EF}{EA} = 2$,

$\angle EAF = 2\angle BAG$ より.

$$\frac{2x}{1-x^2} = 2$$

$$\therefore\ x^2 + x - 1 = 0 \quad \text{—} ①$$

$$\therefore\ x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad (\because x > 0)$$

$BG = 2x = \underline{-1+\sqrt{5}}$

慶早進学塾

$BK = CJ = GJ$ のため、

$$\begin{aligned} JK &= BG - BK + GJ \\ &= BG \\ &= \underline{-1+\sqrt{5}} \end{aligned}$$

また、$2BK + BG = BC = 2$ より、

$$BK = CJ = GJ = 1-x,$$

$$MK = JK = 2x$$

$$BJ = 1+x$$ などから、

$$\begin{aligned} JM^2 &= BJ^2 + BM^2 \\ &= BJ^2 + (MK^2 - BK^2) \\ &= (1+x)^2 + 4x^2 - (1-x)^2 \\ &= 4(x^2+x) \\ &= 4 \quad (\because ①より\ x^2+x=1) \end{aligned}$$

$\therefore JM = \underline{2}$ $(\because JM>0)$

慶早進学塾

$\cos\angle JKM$

$$= -\frac{BK}{MK}$$

$$= -\frac{1-x}{2x}$$

$$= -\frac{x^2}{2x} \qquad (\because ①より\ 1-x=x^2)$$

$$= -\frac{1}{2}x$$

$$= \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

また、

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{MN}{JK}$$

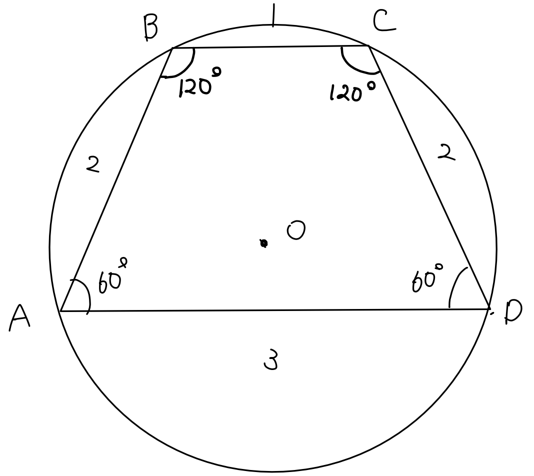
$$= \frac{1}{x}$$

$$= 1+x \qquad \left(\because ①より\ x+1-\frac{1}{x}=0\right)$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

慶早進学塾

V



図形の対称性から $CD = 2$.

これにより, $AD = 3$ $\therefore \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC}$

(1)

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{BD}|^2 &= |\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}|^2 \\
&= |\overrightarrow{AD}|^2 - 2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + |\overrightarrow{AB}|^2 \\
&= 7
\end{aligned}
$$

$\therefore |\overrightarrow{BD}| = \underline{\sqrt{7}}$ $\left(\because |\overrightarrow{BD}| > 0\right)$

外接円の半径を R とすると.

$\triangle ABD$ について, 正弦定理より

$$R = \frac{\sqrt{7}}{2\sin 60^\circ} = \underline{\frac{\sqrt{21}}{3}}$$

慶早進学塾

(2) Oは外接円の中心のため.

$$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) = |\overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{OA}|^2 = 0$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\right)$$

$$= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 = \underline{2}$$

同様にして、$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}|^2 = \underline{\frac{9}{2}}$

(3) $\overrightarrow{AO} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD}$ とする(s.t:実数)

(2)より,

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO} = s|\overrightarrow{AB}|^2 + t\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 2 \\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AO} = s\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + t|\overrightarrow{AD}|^2 = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases} 4s + 3t = 2 \\ 3s + 9t = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\therefore\ s = \frac{1}{6},\quad t = \frac{4}{9}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AO} = \underline{\frac{1}{6}}\overrightarrow{AB} + \underline{\frac{4}{9}}\overrightarrow{AD}$$

慶早進学塾

VI

(1) 節約分は

$$\begin{cases} C < 90 \text{ のとき} & 0 \text{ 万円} \\ 90 \leq C \text{ のとき} & (125 - C) \text{ 万円} \end{cases}$$

このため、これは $C = 90$,

つまり 90 万円 のとき最大となる

(2) $C = 160$ (万円) のとき、

超過利益の期待値は

$\frac{2}{5} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot (160 - 90) = 28$ より

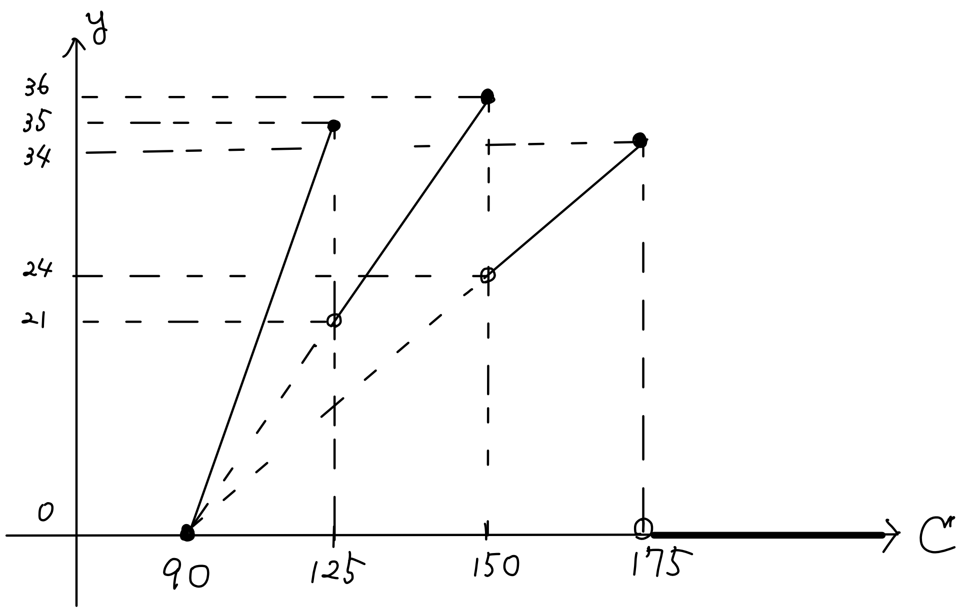
28 万円

慶早進学塾

(a) 超過利益の期待値を $f(c)$ 万円とすると、

$$f(c)=\begin{cases} c-90 & (90 \leq c \leq 125) \\ \frac{3}{5}(c-90) & (125 < c \leq 150) \\ \frac{2}{5}(c-90) & (150 < c \leq 175) \\ 0 & (175 < c) \end{cases}$$

$y=f(c)$ のグラフの概形は以下の通り。



よって、$c=150$ のとき最大となり

このときの期待値は 36 万円

慶早進学塾

$C = 150$（万円）のため.

(b)

$D = 125$ とすると.

補償金の節約分は $\underline{\quad 0 \quad}$ 万円

(c) $D = 175$ とすると

補償金の節約分は $\underline{\quad 25 \quad}$ 万円