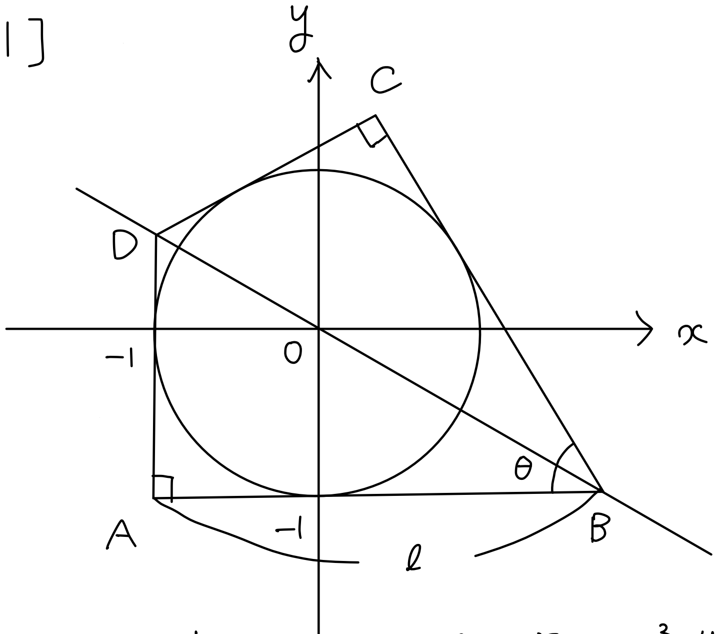
慶應義塾大学　経済学部

[1]



(1) 直線AB、ADはAを通る $x^2+y^2=1$ の接線のため、

それぞれ $y=-1$, $x=-1$ である。

$\therefore \angle BAD = \dfrac{\pi}{2}$

(2) 四角形ABCDは直線BDに関して線対称である。

$CD=\dfrac{5}{3}$ のとき、$AD=\dfrac{5}{3}$。このため、$D\left(-1, \dfrac{2}{3}\right)$

また、$B(\ell-1, -1)$ であり、

直線BDはOを通るため、$\ell=\dfrac{5}{2}$

よって $\tan\angle ABD = \dfrac{2}{3}$

$\angle ABD = \dfrac{\theta}{2}$ より、$\tan\theta = \dfrac{2\cdot\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{12}{5}$

慶早進学塾

(3) 直線 BD は O を通るため. $B(\ell-1, -1)$, $D\left(-1, \frac{1}{\ell-1}\right)$

ここで. 四角形 ABCD の面積が 6 のとき.

$$\triangle ABD = \frac{1}{2}\ell \cdot \frac{\ell}{\ell-1} = \frac{1}{2}\cdot 6$$

$$\therefore \ell^2 - 6\ell + 6 = 0$$

$$\therefore \ell = 3 \pm \sqrt{3}$$

このとき. $\tan\angle ABD = 2 \mp \sqrt{3}$

$$\therefore \tan\theta = \frac{2(2\mp\sqrt{3})}{1-(2\mp\sqrt{3})^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

θ は鋭角のため. $\tan\theta > 0$ より. $\underline{\ell = 3+\sqrt{3}}$. $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

このとき $\underline{\theta = \frac{\pi}{6}}$

慶早進学塾

[2]

$$a_{n+1} = -|a_n| - \frac{1}{2}a_n + 5$$

$$= \begin{cases} -\frac{3}{2}a_n + 5 & (a_n \geq 0 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2}a_n + 5 & (a_n < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1) $a_1 = \frac{1}{2}$ のとき、代入して計算すると、

$a_2 = \frac{17}{4}$　$a_3 = -\frac{11}{8}$ となる。

(2) $-2 \leq a_n \leq -1$ のとき、

$a_n < 0$ より $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 5$　$\therefore\ 4 \leq a_{n+1} \leq \frac{9}{2}$

$a_{n+1} > 0$ より $a_{n+2} = -\frac{3}{2}a_{n+1} + 5$

$= -\frac{3}{4}a_n - \frac{5}{2}$　$\therefore\ -\frac{7}{4} \leq a_{n+2} \leq -1$

(3) $n < m$ のとき、$a_n > 0$ より、

$a_{n+1} = -\frac{3}{2}a_n + 5 \quad (1 \leq n \leq m-1)$

これを解いて $a_n = 2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-11} \quad (1 \leq n \leq m)$

m は $2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-11} < 0$ を満たす最小の自然数のため、

$m = 14$

慶早進学塾

(4) $a_{14} = -\frac{11}{8}$ より $-2 \leqq a_{14} \leqq -1$ を満たす.

また.(2)より $-2 \leqq a_n \leqq -1$ ならば $-2 \leqq a_{n+2} \leqq -1$ となる.

このため.数学的帰納法により.$2k \geqq 14$ のとき.$-2 \leqq a_{2k} \leqq -1$

よって(2)より $a_{2k+2} = -\frac{3}{4}a_{2k} - \frac{5}{2}$

$$\therefore \left(a_{2k+2} + \frac{10}{7}\right) = -\frac{3}{4}\left(a_{2k} + \frac{10}{7}\right)$$

よって $k \geqq 7$ のとき

$$a_{2k} = -\frac{10}{7} + \left(a_{14} + \frac{10}{7}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)^{k-7}$$

$$= -\frac{10}{7} + \frac{3}{56}\left(-\frac{3}{4}\right)^{k-7}$$

3

以下，$w_1=\frac{46}{100}$，$w_2=\frac{35}{100}$，$w_3=\frac{15}{100}$，$w_4=\frac{4}{100}$

$f_1(x)=1-3x$，　$f_2(x)=1-2x$

$f_3(x)=1-2x+2x^2$，$f_4(x)=1-3x+5x^2$　と表記する

(1) $a_1,\dots,a_{100}$ の平均値は．

$$\sum_{i=1}^{4} w_i f_i(x)$$

$$=\frac{46}{100}(1-3x)+\frac{35}{100}(1-2x)+\frac{15}{100}(1-2x+2x^2)+\frac{4}{100}(1-3x+5x^2)$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+1$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{17}{8}$$

よってこの関数は $x=\frac{5}{2}$ で最小値 $-\frac{17}{8}$ をとる

(2) $h_1,\dots,h_{100}$ の平均値は．

$$\sum_{i=1}^{4} w_i \int_0^1 f_i(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 \sum_{i=1}^{4} w_i f_i(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+1\right)dx=-\frac{1}{12}$$

慶早進学塾

$\int_0^1 f_1(x)\,dx = -\frac{1}{2}$　　$\int_0^1 f_2(x)\,dx = 0$

$\int_0^1 f_3(x)\,dx = \frac{2}{3}$　　$\int_0^1 f_4(x)\,dx = \frac{7}{6}$　　より.

分散は $\sum_{i=1}^{4} w_i \left(\int_0^1 f_i(x)\,dx \right)^2 - \left(-\frac{1}{12}\right)^2 = \underline{\frac{11}{48}}$

$C_1, \dots, C_{100}$ の平均値は $\sum_{i=1}^{4} w_i f_i(1) = -1$.

$f_1(1) = -2$, $f_2(1) = -1$　$f_3(1) = 1$　$f_4(1) = 3$

よって共分散は

$$\sum_{i=1}^{4} w_i \left(\int_0^1 f_i(x)\,dx + \frac{1}{12} \right)\left(f_i(1) + 1 \right)$$

$$= \frac{46}{100} \cdot \frac{5}{12} + \frac{35}{100} \cdot 0 + \frac{15}{100} \cdot \frac{3}{2} + \frac{4}{100} \cdot 5 = \underline{\frac{37}{60}}$$

(3). $f_i(1) < 0$ つまり $i = 1, 2$ となる確率は $\frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

・$f_i(1) < 0$ かつ $\int_0^1 f_i(x) < 0$ つまり $i = 1$ となる確率は $\frac{11}{25}$

よって求める条件付確率は $\frac{11}{25} \cdot \frac{5}{4} = \underline{\frac{11}{20}}$

4

(1) $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ より.

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\underline{\frac{3\sqrt{14}}{2}}$$

(2) O, A, B, C が同一平面上にあるとき.

$\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+u\overrightarrow{OB}$ を満たす実数 s, u が存在する.

$$\therefore\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}-t\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

これを解いて. $t=\frac{1}{7}$

このとき C の座標は $\underline{\left(\frac{13}{7},\frac{25}{7},\frac{44}{7}\right)}$

(3) C が xy 平面にあるとき $6+2t=0$ $\therefore t=-3$

このとき C(5, 13, 0) である.

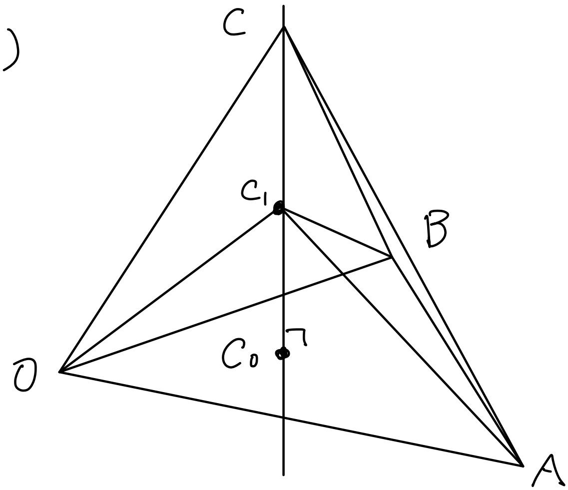
ここで. $\vec{n}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$ は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ に垂直なベクトルであり

$$\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}\frac{13}{7}\\\frac{25}{7}\\\frac{44}{7}\end{pmatrix}-\frac{22}{7}\vec{n}$$ とおける.

このため $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{14}}{2}\cdot\frac{22\sqrt{14}}{7}=\underline{22}$

慶早進学塾

(4)



(2)のときの C を C_0、(3)のときの C を C_1 とする。

四面体 OABC の体積を V' とすると、

$$\frac{V'}{V} = \frac{|\overrightarrow{C_0C}|}{|\overrightarrow{C_0C_1}|} = \frac{\left|t-\frac{1}{7}\right|}{\frac{22}{7}}$$

これが 3 に等しいとき $t = -\frac{65}{7}, \frac{67}{7}$

慶早進学塾

5

(1) $2^{a+1}\log_2 3^x + 2x\log_2\left(\frac{1}{3}\right)^x = \log_s 9^y$

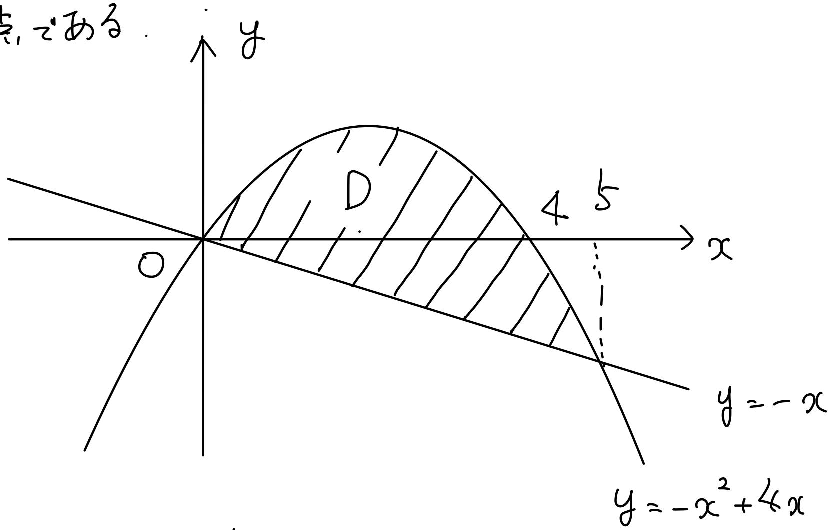
$\therefore\quad 2^{a+1}(\log_2 3)x - 2(\log_2 3)x^2 = \frac{2\log_2 3}{2p+1}y$

整理して. $y = f(x) = -(2p+1)x(x-2^a)$

(2) $a=2,\ p=0$ のとき $f(x) = -x(x+4)$ である.

(m,n) は. $\begin{cases} y \leqq f(x) \\ x+y>0 \end{cases}$ を満たす領域 D に含まれる

格子点である.



領域は図の斜線部分.

ただし. 境界の $x+y=0$ の部分を含まない

よって $0 < m < 5$ であり

慶早進学塾

(m, n) の個数は

$$\sum_{m=1}^{4}\left((-m^2+4m)+m\right) = \underline{20}$$

(3) $y = f(x) = -(2p+1)\left(x-2^{a-1}\right)^2 + (2p+1)\,2^{2a-2}$ である

(i) $p < -\frac{1}{2}$ のとき.

$$\frac{0+2^{a+1}}{2} = 2^a > 2^{a-1}$$ より.

$y = f(x)$ は $x = 2^{a+1}$ で最大値 $(2p+1)\,2^{2a+1}$ をとる.

よって条件を満たすとき.

$-(2p+1)\,2^{2a+1} \leq 2^{3a}$ $\quad \therefore\ p \geq -2^{a-2} - \frac{1}{2}$

$p<-1$ かつ p は整数のため. $-2^{a-2} \leq p \leq -2$

(ii) $p = -1$ のとき $f(x) = 0 < 2^{3a}$ より. 条件を満たす.

(iii) $p > -1$ のとき. $0 < 2^{a-1} < 2^{a+1}$ より

$y = f(x)$ は $x = 2^{a-1}$ で最大値 $(2p+1)\,2^{2a-2}$ をとる

よって条件を満たすとき

$(2p+1)\,2^{2a-2} \leq 2^{3a}$ $\quad \therefore\ p \leq 2^{a+1} - \frac{1}{2}$

$p<-1$ かつ p は整数より. $\quad 0 \leq p \leq 2^{a+1}-1$

(i)(ii)(iii) より

$$-2^{a-2} \leq p \leq 2^{a+1}-1$$

よって 最大値は $2^{a+1}-1$ 最小値は -2^{a-2}

6

(1) • $x < 0$ のとき.

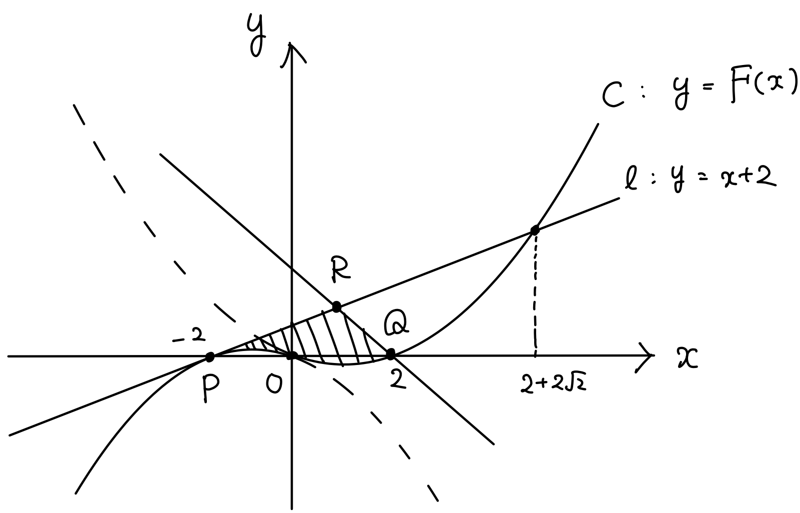
$$F(x) = \frac{1}{2} + \int_0^{x+1} (-t)\,dt = -\frac{1}{2}x^2 - x$$

• $x \geq 0$ のとき.

$$F(x) = \frac{1}{2} + \int_0^{1} (-t)\,dt + \int_1^{x+1} (t-2)\,dt = \frac{1}{2}x^2 - x$$

$$\therefore\ F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 - x & (x < 0) \\ \frac{1}{2}x^2 - x & (x \geq 0) \end{cases}$$

(2)



P$(-2, 0)$, Q$(2, 0)$である。

$F'(-2) = |(-2)+1-1| - 1 = 1$ より

接線の方程式は、$y = x + 2$.

$$\therefore S = \int_{-2}^{2+2\sqrt{2}} (x+2)\,dx - \int_{-2}^{2+\sqrt{2}} F(x)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2+2\sqrt{2}} (x+2)\,dx - \int_{2}^{2+2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) dx \quad (\because F(x)\text{は奇関数})$$

$$= 8 + \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

m が S を 2等分するときの R の座標を (x, y) とする

図の斜線部分の面積は △PQR の面積に

等しいことに気をつけると、

$$\triangle PQR = 2y = \frac{1}{2}\left(8 + \frac{16\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$\therefore y = 2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

R は $y = x + 2$ 上の点より $R\left(\frac{4\sqrt{2}}{3},\ 2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$

慶早進学塾