慶應義塾大学 看護

1 (1) $\log_3 \sqrt{6} - \log_3 \frac{2}{3} + \log_3 \sqrt{2} = \log_3 3\sqrt{3} = \underline{\frac{3}{2}}$ ア

(2) $\frac{a^{2p} - a^{-2p}}{a^p + a^{-p}} = a^p - a^{-p} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$ イ

(3) $f(\theta) = \cos 2\theta + 2\cos\theta$

$= 2\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1$

$= 2\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$

$0 \leq \theta \leq \pi$ で $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ のため.

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ つまり $\theta = \underline{\frac{2}{3}\pi}$ ウ のとき. 最小値 $-\frac{3}{2}$

$\cos\theta = 1$ つまり $\theta = \underline{0}$ エ のとき 最大値 3 をとる

(4)

- 最小値が 2 以上 のとき. $\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \underline{\frac{125}{216}}$ オ
- 最小値が ちょうど 2 となるとき. $\left(\frac{5}{6}\right)^3 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \underline{\frac{61}{216}}$ カ
- 最小値が 2 で どの 2つの目も 互いに素になる 目の出方は. $\{2, 3, 5\}$ のみであり. 確率は $\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$

このため. 求める条件付確率は $\frac{\frac{1}{36}}{\frac{61}{216}} = \underline{\frac{6}{61}}$ キ

(5) x^2+ax+b は実係数多項式のため.

α を解にもつとき. $\bar{\alpha}$ も解にもつ.

よって. 解と係数との関係から.

$$a=-(\alpha+\bar{\alpha})=\underline{-\frac{1}{2}}\ \text{ク}$$

$$b=\alpha\bar{\alpha}=|\alpha|^2=\underline{\frac{1}{4}}\ \text{ケ}$$

また. $f(\alpha)=4\alpha^4-3\alpha^3+2\alpha^2$

$$=\left(\alpha^2-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}\right)\left(4\alpha^2-\alpha+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{8}$$

$$=\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{8}$$

$$=\underline{-\frac{\sqrt{3}}{8}i}\ \text{コ}$$

II

(1) $x^2+y^2-2x+6y=0$

$(x-1)^2+(y+3)^2=10$ のため.

中心は $\underline{(1,-3)}$ サ 半径は $\underline{\sqrt{10}}$ シ

直線 $y=3x-1$ と $(1,-3)$ との距離は $\frac{\sqrt{10}}{2}$

よって. $AB=2\sqrt{(\sqrt{10})^2-\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2}=\underline{\sqrt{30}}$ ス

ABの垂直二等分線は $(1,-3)$ を通り. $y=3x-1$ に直交する

直線のため. $\underline{y=-\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}}$ セ

(2) $4a_{n+1}=2a_n+3$

$\therefore\ a_{n+1}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{3}{2}\right)$

このため数列 $\left\{a_n-\frac{3}{2}\right\}$ は初項 $\frac{5}{2}$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である.

$\therefore\ a_n-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\qquad \therefore\ a_n=\underline{\frac{5}{2^n}+\frac{3}{2}}$ ソ

$\sum_{n=1}^{\ell}a_n=5+\frac{3}{2}\ell-\frac{5}{2^\ell}\geq 20$ となる最小の自然数は. $\ell=\underline{11}$ タ

慶早進学塾

(3)

(i) n が 3 の倍数でないとき. $n \equiv \pm 1 \pmod 3$ である.

このため $n^2 \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1 \pmod 3$ となり.

n^2 を 3 で割った余りは 1 となる □

(ii) 整数 x, y, z が $x^2 + y^2 = z^2$ を満たし.

かつ x も y も 3 の倍数でない. と仮定する.(背理法)

このとき. (i) の結果から.

$z^2 \equiv x^2 + y^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 3$ となるが.

$z \equiv 0 \pmod 3$ のとき. $z^2 \equiv 0 \pmod 3$

$z \equiv \pm 1 \pmod 3$ のとき $z^2 \equiv 1 \pmod 3$ となる.

$z^2 \equiv 2 \pmod 3$ を満たす整数 z は存在しないため. 矛盾する.

よって 背理法により x と y の少なくとも一方は 3 の倍数である □

慶早進学塾

Ⅲ

(1) 平均値は 95点、チ 中央値は 94.5点、ツ

最頻値は 94点、テ 分散は 2.6 ト である。

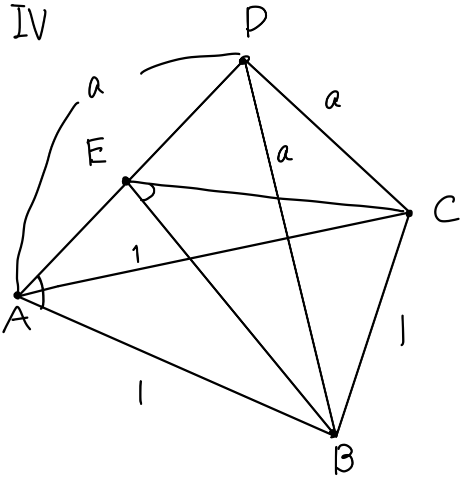
(2) $y = ax + b$ と変換したとき、

y の分散は $a^2 s_B^2$，平均値は $a\overline{x}_B + b$ となる。

これがそれぞれ s_A^2，$\overline{x}_A$ に一致するため、

$$\begin{cases} s_A^2 = a^2 s_B^2 \\ \overline{x}_A = a\overline{x}_B + b \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a = \dfrac{s_A}{s_B} & \text{ナ} \\ b = \overline{x}_A - \dfrac{s_A \overline{x}_B}{s_B} & \text{ニ} \end{cases} \quad (\because a > 0)$$

IV



以下 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ と表記する.

$|\overrightarrow{BD}|=|\vec{b}-\vec{d}|=a$ より.

$|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2=a^2$ $\therefore$ $\vec{b}\cdot\vec{d}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $\cos\angle BAD=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{d}}{|\vec{b}||\vec{d}|}=\underline{\dfrac{1}{2a}}$ ヌ

$\overrightarrow{EB}=\underline{\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}}$ ネ となるため.

$$|\overrightarrow{EB}|^2=\left|\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{d}\right|^2$$
$$=|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{d}+\frac{1}{4}|\vec{d}|^2$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}a^2$$

$\therefore |\overrightarrow{EB}|=\underline{\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+2}}$ ノ

同様に $|\overrightarrow{EC}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+2}$ であり.

$|\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EC}|=|\overrightarrow{CB}|=1$ より.

慶早進学塾

$$|\overrightarrow{EB}|^2 - 2\,\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC} + |\overrightarrow{EC}|^2 = 1$$

$$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC} = \underline{\frac{1}{4}a^2} \text{ハ}$$

また、$\cos\angle BEC = \dfrac{\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}}{|\overrightarrow{EB}||\overrightarrow{EC}|} = \dfrac{a^2}{a^2+2}$

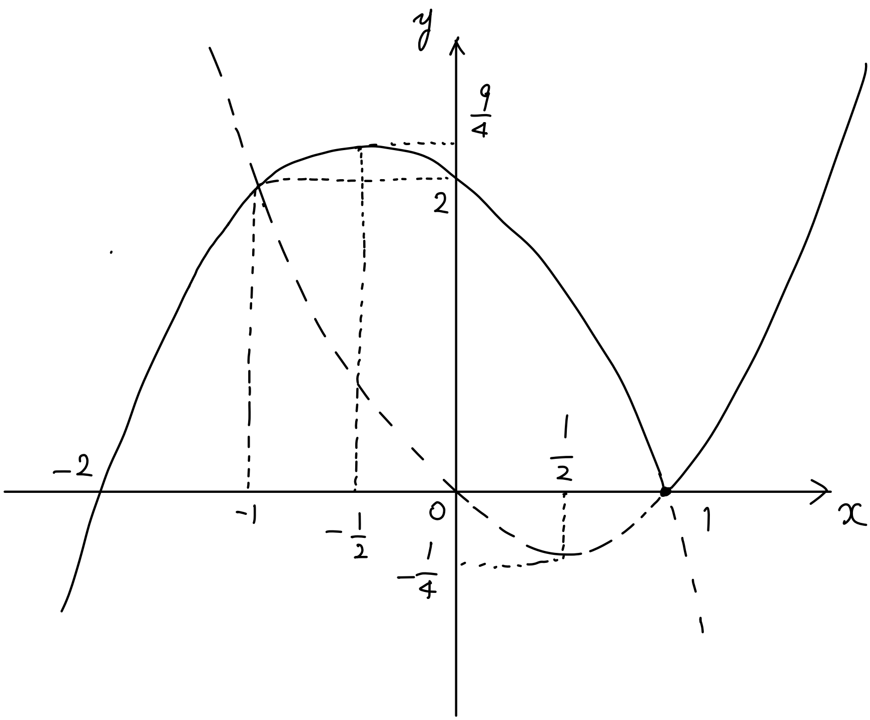
このため、$a=1$ のとき、$\cos\angle BEC = \underline{\dfrac{1}{3}}$ ヒ

$\angle BEC = 60^\circ$ のとき、$\dfrac{a^2}{a^2+2} = \dfrac{1}{2}$ より $a = \underline{\sqrt{2}}$ フ $(\because a>0)$

V

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2-x & (x \geq 1 \text{ のとき}) \\ -x^2-x+2 & (x<1 \text{ のとき}) \end{cases}$

となるため、$y=f(x)$ のグラフは以下の実線部分



(2) $f(x)=k$ の異なる実数解の個数は、2つのグラフ

$\begin{cases} y=f(x) \\ y=k \end{cases}$

の交点の個数に等しい。

よって、異なる3つの実数解をもつ k の範囲は、

$0<k<\dfrac{9}{4}$

慶早進学塾

(3) $f'(x)=\begin{cases}2x-1 & (x>1)\\ -2x-1 & (x<1)\end{cases}$ より $f'(0)=-1$

このため 接線 l の方程式は $y=-x+2$ ホ

$x\geqq1$ の部分での l と $y=f(x)$ の交点の x 座標は

$-x+2=x^2-x$ を満たす. $\therefore x=\pm\sqrt{2}$

$x\geqq1$ であったから $x=\sqrt{2}$ マ

$y=f(x)$ と l で囲まれた図形の面積は

$$\int_0^1\left((-x+2)-(-x^2-x+2)\right)dx+\int_1^{\sqrt{2}}\left((-x+2)-(x^2-x)\right)dx$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{4}{3}$$ ミ

(4) $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ としたとき

$F'(x)=f(x)$ のため. $F'(x)=0$ のとき $x=-2,\ 1$ ム

$F(x)$ の増減は以下の表のとおり

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$F(x)$	↘	極小	↗		↗

よって. $F(x)$ は $x=-2$ で メ

最小値 $\int_0^{-2}(-x^2-x+2)\,dx=-\frac{10}{3}$ をとる. モ

慶早進学塾