慶應義塾大学　理工学部

1　(1)(i) $\vec{x} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ とするとき.

$\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$, $\vec{c} \perp \vec{a}$ より.

$\vec{x} \cdot \vec{a} = p|\vec{a}|^2 = \underline{4p}$ ア

$|\vec{x}|^2 = p^2|\vec{a}|^2 + q^2|\vec{b}|^2 + r^2|\vec{c}|^2$

$= 4p^2 + q^2 + r^2$

$\therefore |\vec{x}| = \underline{\sqrt{4p^2 + q^2 + r^2}}$ イ

(ii) $\vec{x} = (5, 0, z)$ とする

これが $\vec{x} = s\vec{a} + (\cos\theta)\vec{b} + (\sin\theta)\vec{c}$

と表されるとき (i) の結果から.

$$\begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{a} = 5\sqrt{3} + 8 = 4s \\ |\vec{x}|^2 = 25 + z^2 = 4s^2 + 1 \end{cases}$$ となる.

これを解いて. $z = \underline{\sqrt{3}, \dfrac{7\sqrt{3}}{3}}$ ウ

慶早進学塾

(2) n は奇数より，$n = 2k+1$ （k：整数）とおける．

このとき，

$$n\left[\frac{3n+2}{2}\right] = (2k+1)(3k+2)$$

$$\equiv k+2 \pmod 6$$ のため．

$$n\left[\frac{3n+2}{2}\right] \equiv 0 \pmod 6 \iff k \equiv 4 \pmod 6$$

すると．$k = 6m+4$ （m：整数）とおけるため

$n = 2k+1 = 12m+9$ とおける

このため

$n\left[\frac{3n+2}{2}\right]$ が 6 の倍数である必要十分条件は．

n を $\underbrace{12}_{エ}$ で割った余りが $\underbrace{9}_{オ}$ であることである．

慶早進学塾

2 (1) 共有点をもつとき，r は $(2, 0)$ と共有点との距離である

共有点を $(3\cos\theta, \sin\theta)$ とおくと．

$$r^2 = (3\cos\theta - 2)^2 + \sin^2\theta$$

$$= 8\left(\cos\theta - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より　$\frac{1}{2} \leqq r^2 \leqq 25$

$r > 0$ より　$\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{カ} \leqq r \leqq \underline{5}_{キ}$

慶早進学塾

(2) $r=1$ のとき。

$C_1: (x-2)^2+y^2=1$

$C_2: \frac{1}{9}x^2+y^2=1$ の共有点を求める。

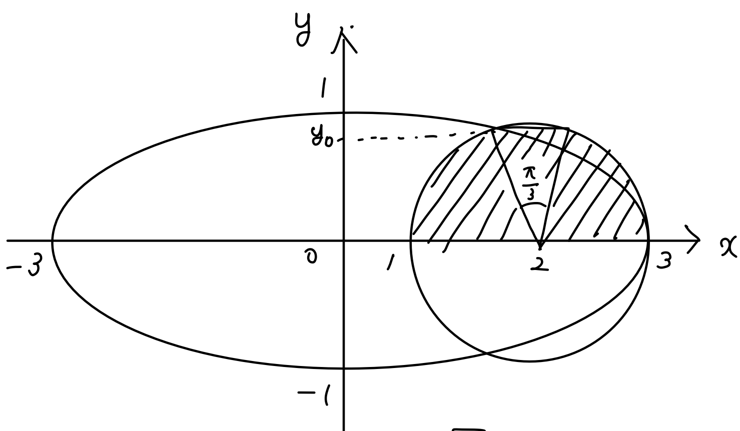
$$(x-2)^2=\frac{1}{9}x^2$$

$$\therefore (2x-3)(x-3)=0$$

$$\therefore x=3,\ \frac{3}{2}$$

よって共有点は $(3, 0)\left(\frac{3}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ク

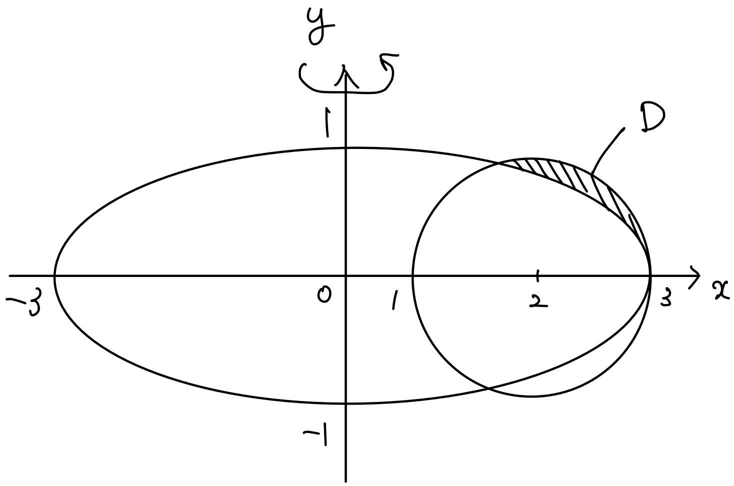
$y_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ であり。



求める面積は。 $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$ ケ

慶早進学塾

(3)



回転体の体積を V とすると，

$$\frac{V}{\pi}=\int_0^1\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)^2dy+\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(2-\sqrt{1-y^2}\right)^2dy-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(3\sqrt{1-y^2}\right)^2dy$$

$y=\sin\theta$ とおくと，$dy=\cos\theta\,d\theta$ であり，

$$\frac{V}{\pi}=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\left(2+\cos\theta\right)^2\cos\theta\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{3}}9\cos^3\theta\,d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ V=\frac{4}{3}\pi^2-\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$$

コ

慶早進学塾

3

(1) 求める確率は $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$ サ

(2) 表が2回, 裏が1回出る確率は ${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$

表2回 裏1回が出て, かつ 白玉が2個になる確率は

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{11}{48}$$

よって求める条件付確率は $\frac{11}{48}\cdot\frac{8}{3}=\frac{11}{18}$ シ

(3) 袋の中が白玉のみのとき, k回とも裏が出ているため,

この事象の確率は $\frac{1}{2^k}$ ス

(4) 1回目赤玉を加える確率は $\frac{1}{2}$,

1回目赤玉を加え, かつ 白玉が k個となるとき,

1回目に表, 2回目以降は裏が出続け,

白玉をひき続けているため, 確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{k-1}{k}=\frac{1}{k\cdot 2^k}$$

求める条件付確率は $\frac{1}{k\cdot 2^k}\cdot 2=\frac{1}{k\cdot 2^{k-1}}$ セ

慶早進学塾

(5) このとき、表が1回出て、裏が出た回は全て

白玉を加えている

表が n 回目で出て、白玉がちょうど k 個になる確率は

$$\frac{1}{2^k}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\cdots\cdot\frac{k-1}{k}=\frac{n}{k\cdot 2^k}$$

よって求める確率は

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{n}{k\cdot 2^k}=\frac{\frac{1}{2}k(k+1)}{k\cdot 2^k}=\frac{k+1}{2^{k+1}}$$

ソ

4(1)

$y=e^x$ と $y=ax+b$ が共有点をもつには

$e^x=ax+b$ つまり $e^x-ax=b$ が実数解をもてば良い

このとき2つのグラフ $\begin{cases} y=e^x-ax & \text{—①} \\ y=b & \text{—②} \end{cases}$ が共有点をもつ

①の右辺を $f(x)$ とおくと、$f'(x)=e^x-a$ である

[i] $a>0$ のとき、

$x=\log a$ で $f'(x)=0$、より増減は以下の通り、

x	$\cdots$	$\log a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$a(1-\log a)$	$\nearrow$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$、$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ より、

$b \geqq a(1-\log a)$ で ①、② は共有点をもつ。

[ii] $a=0$ のとき、$f'(x)>0$ より $f(x)$ は単調増加で

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$、$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ より、

$b>0$ で ①、② は共有点をもつ。

[i][ii]より $(a=0$ かつ $b>0)$ または $(a>0$ かつ $b \geqq a(1-\log a))$

のとき、①、②は共有点をもち、このとき、

$y=e^x$ と $y=ax+b$ も共有点をもつ

慶早進学塾

(2) A から $y=x$ におろした垂線の方程式は

$$y = -x + (e^t + t).$$

これと $y=x$ との交点が B であるから.

B の x 座標は $\dfrac{e^t+t}{2}$ タ

半径は A と $y=x$ との距離に等しく $\dfrac{e^t-t}{\sqrt{2}}$ チ

$P\left(\dfrac{3}{10}e^t + \dfrac{7}{10}t,\ \dfrac{7}{10}e^t + \dfrac{3}{10}t\right)$ である.

このため

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Y(t) - kX(t)}{\sqrt{(X(t))^2 + (Y(t))^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\left(\frac{7}{10}e^t + \frac{3}{10}t\right) - k\left(\frac{3}{10}e^t + \frac{7}{10}t\right)}{\sqrt{\left(\frac{3}{10}e^t + \frac{7}{10}t\right)^2 + \left(\frac{7}{10}e^t + \frac{3}{10}t\right)^2}}$$

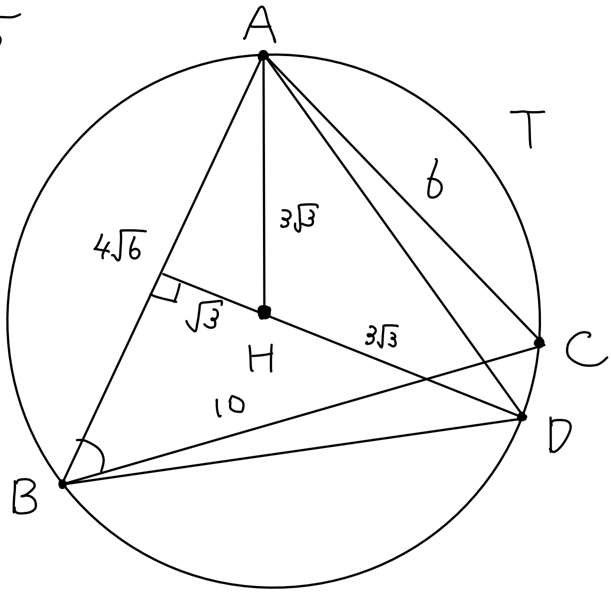
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(7+3te^{-t}) - k(3+7te^{-t})}{\sqrt{(3+7te^{-t})^2 + (7+3te^{-t})^2}}$$

$$= \frac{7-3k}{\sqrt{58}}$$

よってこれが 0 に等しいとき. $k = \dfrac{7}{3}$ ツ

慶早進学塾

5



(1) $\cos\angle ABC = \dfrac{10^2 + (4\sqrt{6})^2 - 6^2}{2\cdot 10\cdot 4\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ テ

$\therefore\ \sin\angle ABC = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

T は △ABC の外接円のため、正弦定理から、

$R = \dfrac{AC}{2\sin\angle ABC} = 3\sqrt{3}$ ト

T の中心は H であり、

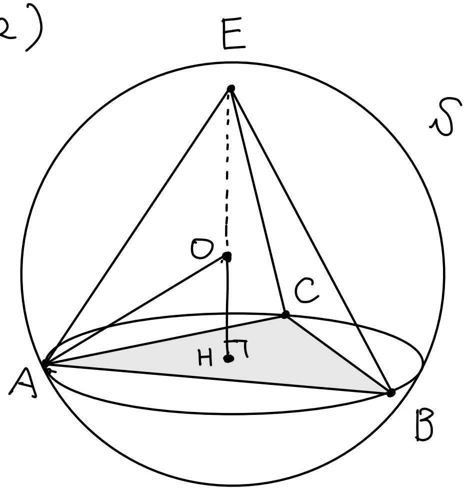
△DAB の面積が最大となるとき、上の図のように

AB と DH が直交する。

このときの面積は、$\dfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{6}\cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{2}$ ナ

慶早進学塾

(2)



$$OH = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{3})^2} = \underline{\sqrt{5}}$$ ニ

(3) 三角錐 EABC の体積 V が最大となるとき、

E, O, H がこの順に同一直線上に並ぶ

このとき、

$$V = \frac{1}{3} \cdot \triangle ABC \cdot (EO + OH)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 20\sqrt{2} \cdot (4\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$= \underline{\frac{160 + 20\sqrt{10}}{3}}$$ ヌ

慶早進学塾