慶應義塾大学 商学部

1 (1)

(i) $A = \{ n \mid n$ は 2 の倍数，$1 \leq n \leq 1000 \}$

$B = \{ n \mid n$ は 3 の倍数，$1 \leq n \leq 1000 \}$

$C = \{ n \mid n$ は 5 の倍数，$1 \leq n \leq 1000 \}$ とする．

このとき，$\#A = 500$　$\#B = 333$　$\#C = 200$

$\#(A \cap B) = 166$　$\#(B \cap C) = 66$　$\#(C \cap A) = 100$　$\#(A \cap B \cap C) = 33$

よって少なくとも 2 つで割り切れる数の個数は，

$$\#((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A))$$
$$= \#(A \cap B) + \#(B \cap C) + \#(C \cap A) - 2\#(A \cap B \cap C)$$
$$= \underline{266}$$

少なくとも 1 つで割りきれ，かつ 6 の倍数でない数の個数は，

$$\#((A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B))$$
$$= 734 - 166 = \underline{568}$$

(ii) 判別式 $D > 0$ となる θ の範囲を求めれば良い

$$\therefore \frac{D}{4} = 2\cos^2\theta - \sqrt{2}\sin\theta > 0$$
$$\therefore (\sin\theta + \sqrt{2})(\sqrt{2}\sin\theta - 1) < 0$$
$$\therefore -\sqrt{2} \leq \sin\theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

これを満たす θ の範囲は，

$$\underline{\left(2n - \frac{5}{4}\right)\pi \leq \theta \leq \left(2n + \frac{1}{4}\right)\pi \quad (n : \text{整数})}$$

慶早進学塾

(iii) $C_1 : y = x^2$ において. $y' = 2x$ より.

$P(a, a^2)$ における法線の方程式は

$$y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x-a)$$

つまり $y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$

とくに $a=1$ のとき. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ —①

$C_2 : y - q = -(x-p)^2$ 上の点 $(a'+p, -a'^2+q)$ における

法線の傾きは $\frac{1}{2a'}$.

よって法線が一致するとき. $a' = -1$

ここで $(-1+p, -1+q)$ は ① 上の点 より

$$q = -\frac{1}{2}p + 3$$

Ⅱ

(i) $$\triangle OAB = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{14\cdot 14 - 2^2} \qquad = \underline{4\sqrt{3}}$$

(ii) Cの座標は $\underline{(8,\ -8,\ 8)}$

(iii) 四面体OABCの体積Vは

$$V = \frac{1}{3}\cdot\triangle OAB\cdot|\overrightarrow{OC}| \qquad = \underline{32}$$

(iv) $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\5\\7\end{pmatrix}$ は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ に垂直なベクトルである。

平面ABCの方程式は

$\vec{n}\cdot\vec{x} = k$ (k : 定数) と表されるため

$$\begin{pmatrix}1\\5\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \underline{x + 5y + 7z - 24 = 0}$$

慶早進学塾

(v) $\overrightarrow{OH} = t\vec{n}$ (t:実数) とおくと.

Hは平面ABC上の点のため.

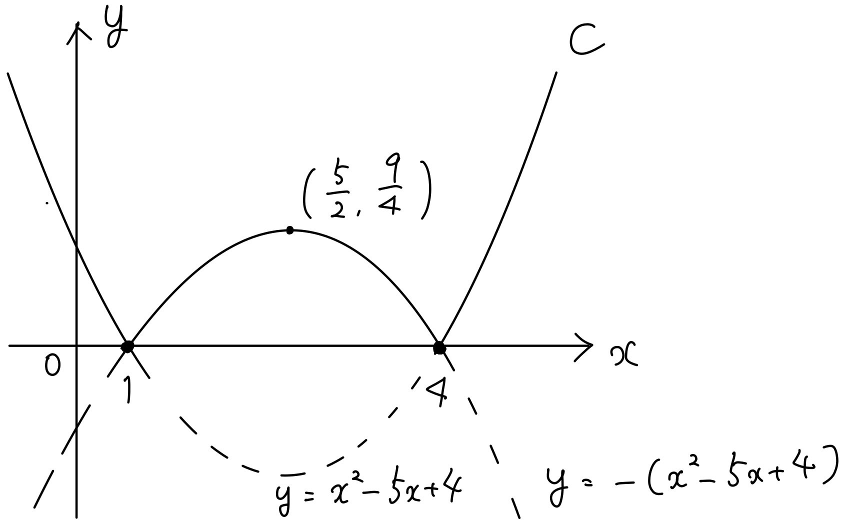
$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OH} = t\|\vec{n}\|^2 = 24$ $\therefore t = \dfrac{8}{25}$

よってHの座標は $\left(\dfrac{8}{25}, \dfrac{8}{5}, \dfrac{56}{25}\right)$

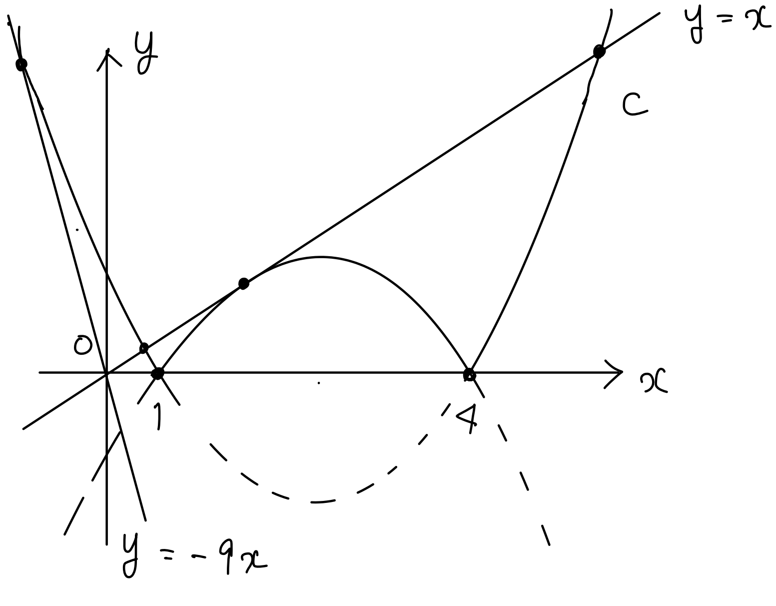
慶早進学塾

Ⅲ

(i) グラフ C は以下の実線部分



C と $y = mx$ が接するとき, $m = 1, -9$



慶早進学塾

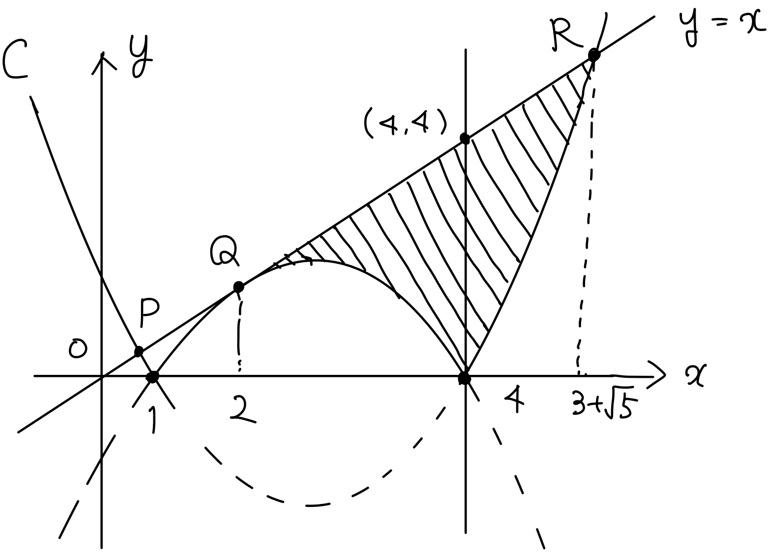
$y=mx$ は原点を通り、傾き m の直線のため、

C と $y=mx$ との共有点の個数は、

$$\begin{cases} -9<m<0 & \text{のとき } 0 \\ m=-9 & \text{のとき } 1 \\ m<-9,\ m=0,\ 1<m & \text{のとき } 2 \\ m=1 & \text{のとき } 3 \\ 0<m<1 & \text{のとき } 4 \end{cases}$$

である

以下 $m=1$ のときを考える



慶早進学塾

(ii) P, R は $y=x$ と $y=x^2-5x+4$ の交点，
Q は $y=x$ と $y=-x^2+5x-4$ の交点のため，

P, Q, R の x 座標は順に，

$3-\sqrt{5}$ ，2，$3+\sqrt{5}$

(iii) C と QR で囲まれた斜線部分の面積は，

$$\int_2^4\left(x-(-x^2+5x-4)\right)dx+\int_4^{3+\sqrt{5}}\left(x-(x^2-5x+4)\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(1+\sqrt{5})-\frac{2^3}{6}+\frac{1}{6}(\sqrt{5}-1)^3$$

$$=\frac{-6+10\sqrt{5}}{3}$$

慶早進学塾

IV

(i) 10日目までに x 回価格が上昇したとすると、

10日目の価格は $1.08^{x} \cdot 0.96^{10-x} A$.

これが A より高いとき、

$$1.08^{x} \cdot 0.96^{10-x} A > A$$

$$\therefore x \log_{10} 1.08 + (10-x) \log_{10} 0.96 > 0$$

$$\therefore x > \frac{0.179}{0.0512}$$

x は $0 \leq x \leq 10$ となる整数より $4 \leq x \leq 10$

よって 4日以上

このようになる確率は $\displaystyle\sum_{x=4}^{10} {}_{10}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{53}{64}$

(ii) 5日目までに y 回価格が上昇したとすると、

5日目の価格は $1.08^{y} \cdot 0.96^{5-y} A$.

これが A より低いとき、 $y < \dfrac{0.0895}{0.0512}$

よって $0 \leq y \leq 1$ であり、

このようになる確率は $\displaystyle\sum_{y=0}^{1} {}_{5}C_y \left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \frac{3}{16}$

また，5日目の価格がAより低く，
かつ10日目の価格がAより高くなる確率は．

$$ {}_5C_0\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\sum_{k=4}^{5}{}_5C_k\left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^5\sum_{k=3}^{5}{}_5C_k\left(\frac{1}{2}\right)^5 $$

$$ = \frac{43}{512} $$

よって求める条件付確率は $\frac{43}{512}\cdot\frac{16}{3} = \underline{\frac{43}{96}}$

(iii) 1日目と2日目に，ともに価格が上昇し．
かつ10日目の価格がAより高くなる確率は

$$ \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\sum_{k=2}^{8}{}_8C_k\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{247}{1024} $$

よって求める条件付確率は．

$$ 1-\frac{247}{1024}\cdot\frac{64}{53} = \underline{\frac{601}{848}} $$

慶早進学塾