早稲田大学 商学部

$\boxed{1}$

(1) (i) より $a_1 > 0,\ a_2 > 0$

(ii) より $a_n > 0$ かつ $a_{n+1} > 0$ ならば $a_{n+2} > 0$ より、

数学的帰納法から、任意の $n \geq 1$ で $a_n > 0$.

よって (ii) から、

$$\log_2 a_{n+2} = (\log_2 a_{n+1}) \cdot (\log_2 a_n)$$

$$\therefore \quad \log_2(\log_2 a_{n+2}) = \log_2(\log_2 a_{n+1}) + \log_2(\log_2 a_n)$$

これにより $b_n := \log_2(\log_2 a_n)$ を順に求めていくと、

$b_1 = 1,\ b_2 = 1,\ b_3 = 2,\ b_4 = 3,\ b_5 = 5,$
$b_6 = 8,\ b_7 = 13,\ b_8 = 21,\ b_9 = 34,\ b_{10} = 55$

$$\log_2(\log_2 a_{10}) = \underline{55}$$

慶早進学塾

(2) $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $(0 \leq r \leq \sqrt{3})$ とする.

このとき.

$x - y - xy$

$= r\cos\theta - r\sin\theta - r^2\cos\theta\sin\theta$

r を固定し, これを θ で微分すると.

$-r(\sin\theta + \cos\theta + r(\cos^2\theta - \sin^2\theta))$

$= -r^2(\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta + \frac{1}{r})$

よって r を固定すると, $x - y - xy$ は.

$\cos\theta + \sin\theta = 0$ または. $\cos\theta - \sin\theta + \frac{1}{r} = 0$

を満たす θ で極値をとり得る

よって r を固定したときの最大値は

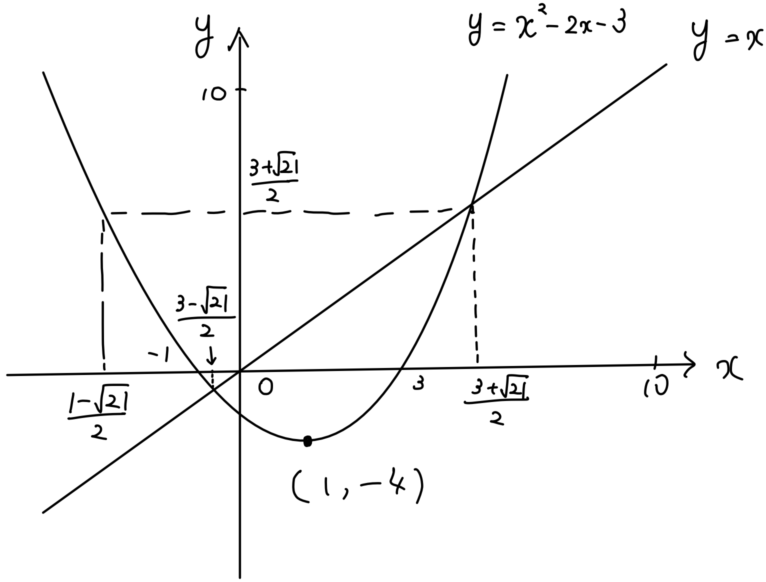
θ がこの条件を満たすところのみ調べればよく, $\frac{1}{2}(r + \sqrt{2})^2 - 1$

このため. $0 \leq r \leq \sqrt{3}$ では.

$r = \sqrt{3}$ のとき. 最大値 $\underline{\frac{3 + 2\sqrt{6}}{2}}$ をとる

(3)

$y = x^2 - 2x - 3$, $y = x$ のグラフは以下の通り



よって

- $a = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ のとき.

  $n \geq 2$ で $a_n = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ となり, $a_n \leq 10$ をみたす.

- $a < \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ のとき, $\frac{3+\sqrt{21}}{2} < a_2$ であり.

  $a_n > \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ ならば $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n - 3 > a_n \left(> \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)$

  よって 帰納的に $a_{n+1} > a_n$ がいえる

慶早進学塾

このため、数列 $\{a_n\}$ は単調増加する

これが α に収束するならば

$\alpha = \alpha^2 - 2\alpha - 3$ より $\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$ となるが、

$a_n > \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ より、この単調増加数列は収束しない。

$\therefore \lim_{n \to \infty} a_n = \infty$

よって十分大きな n について $10 < a_n$

以上のことから、任意の n で $a_n \leq 10$ となる

a の最小値は $\frac{1-\sqrt{21}}{2}$

慶早進学塾

(4) $f'(x) = a(x-1)(x-2)$ とおける (a: 定数)

このとき

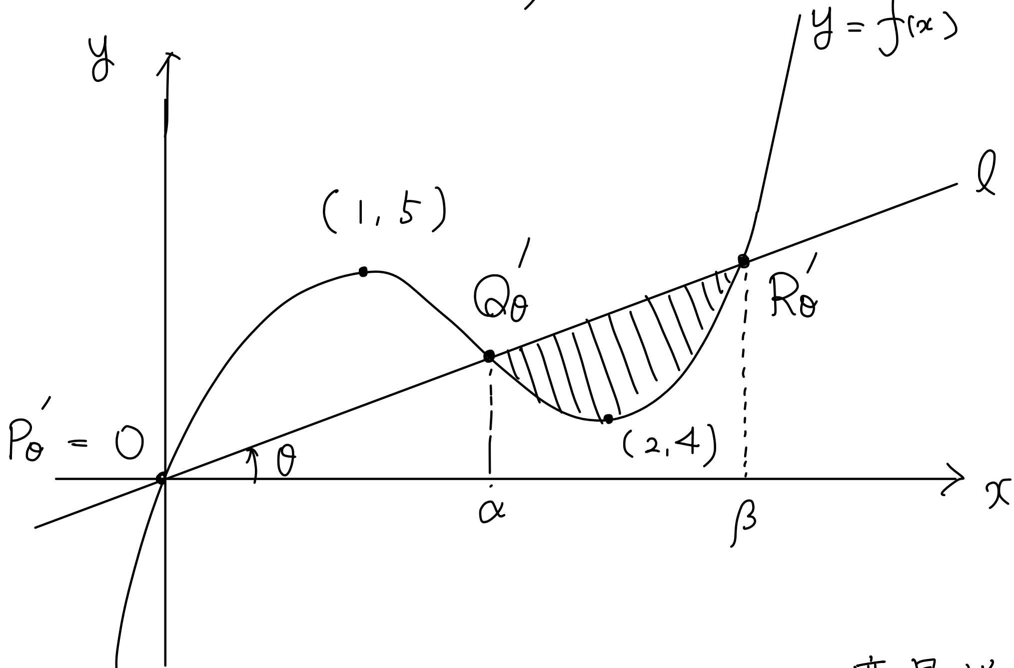
$$f(x) = a\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right) + C \quad (c: 定数)$$

となるが，$f(1)=5$，$f(2)=4$ より

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$$

x軸，P_θ, Q_θ, R_θ を反時計回りに θ 回転したものをそれぞれ l, P_θ', Q_θ', R_θ' とすると，

グラフは以下の通り



慶早進学塾

よって Q_θ', R_θ' の x 座標をそれぞれ α, β とすると、

$$-\int_\alpha^\beta 2x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{81}{32}$$

$$\therefore -\frac{1}{6}\left\{3(\beta^4-\alpha^4)-4(\alpha+\beta)(\beta^3-\alpha^3)+6\alpha\beta(\beta^2-\alpha^2)\right\} = \frac{81}{32}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3(\beta+\alpha) = \frac{81}{32}$$

ここで $l : y = mx$ とすると、

$(2x^3-9x^2+12)-mx=0$ の解は $x=0, \alpha, \beta$ である。

解と係数との関係より、$\alpha+\beta = \frac{9}{2}$,

$\beta-\alpha$ は実数のため $\beta-\alpha = \frac{3}{2}$ $\quad \therefore \alpha = \frac{3}{2}$

よって Q_θ' の座標は $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$

よって Q_θ の x 座標は $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$

$\boxed{2}$

$\prec$ は辞書式順序であるから、$0 \leq n \leq m$ について、

$\vec{p_n} = (x, y, z)$ のとき、$n-1$ の8進法表記は $xyz_{(8)}$

(1) $66 = 1 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8 + 2$ より、

$66 = 102_{(8)}$

このため、$\vec{p_{67}} = (1, 0, 2)$

(2) $\vec{p_n} = (x, y, z) \perp (1, 0, -2)$

$\therefore\ x - 2z = 0$

これを満たす $\vec{p_n} \in P$ で n が最大となるとき、

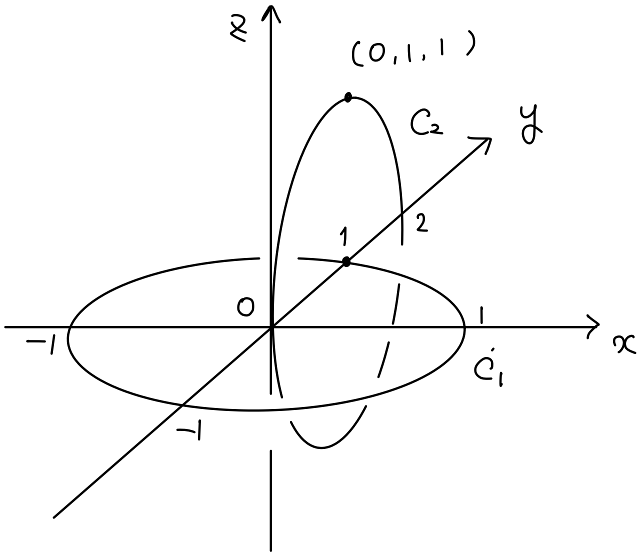
$(x, y, z) = (6, 7, 3)$

このとき、$n = 6 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 3 + 1$

$= 444$

慶早進学塾

$\boxed{3}$



(1) C_1 上の正三角形の頂点を $(x_1, y_1, 0)$ $(x_2, y_2, 0)$ とすると.

対称性より $x_2 = -x_1$, $y_2 = y_1$

$$\therefore \quad x_1^2 + (y_1 - 1)^2 + 1 = 4x_1^2$$

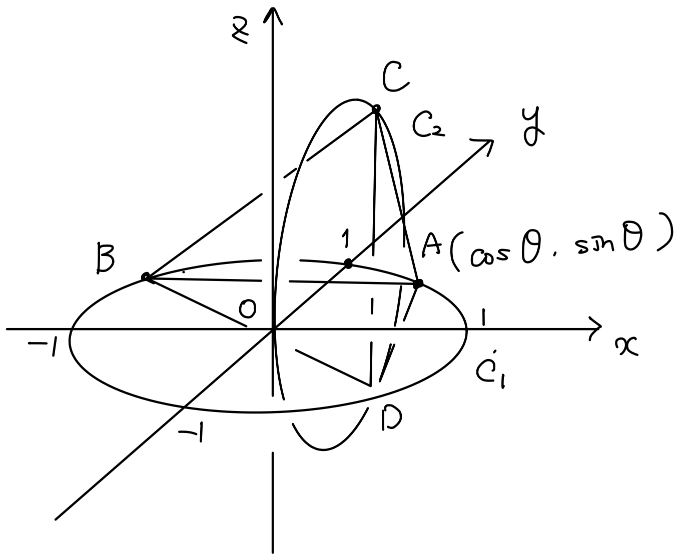
$x_1^2 + y_1^2 = 1$ より $\quad y_1 = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$

よって 1辺の長さ a は.

$$a = 2|x_1| = 2\sqrt{1 - y_1^2} = \frac{\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{2}$$

慶早進学塾

(2) C_1上に3頂点があるとき、残りの頂点は$(0, 0, \pm 1)$
しかし、これは$C_1 \cup C_2$上にないため不適。
同様に、C_2上に3頂点があることもなく。
頂点はC_1上に2つ、C_2上に2つある



正四面体ABCDについて、$A, B \in C_1$, $C, D \in C_2$ とする。

ABの垂直二等分面は、z軸を通る平面だが、

これと C_2 が少なくとも2つの共有点C, Dをもつ。

このため、$A(\cos\theta, \sin\theta, 0)$

$B(-\cos\theta, \sin\theta, 0)$ とおける

また、同様にして、$C(0, 1+\sin\eta, \cos\eta)$

$D(0, 1+\sin\eta, -\cos\eta)$ とおけるが、

$AB = CD$ より、

$$A(\cos\theta, \sin\theta, 0)$$
$$B(-\cos\theta, \sin\theta, 0)$$
$$C(0, 1\pm\sin\theta, \cos\theta)$$
$$D(0, 1\pm\sin\theta, -\cos\theta) \quad \text{(複号同順)}$$

とおける。

慶早進学塾

ABの中点と、CDの中点間の距離は、

1辺の長さの $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍であるから、

$$\pm\left(\sin\theta-(1\pm\sin\theta)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\cos\theta$$

（複号任意）

$\therefore \cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ —① または、$1-2\sin\theta=\pm\sqrt{2}\cos\theta$ —②

②のとき、

$$(1-2\sin\theta)^2=2(1-\sin^2\theta)$$

$$\therefore 6\sin^2\theta-4\sin\theta-1=0$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{2\pm\sqrt{10}}{6}$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\pm\sqrt{2}\pm 2\sqrt{5}}{6}$$ （複号任意）

以上より　1辺の長さ a は

$$a=2|\cos\theta|=\sqrt{2},\ \frac{2\sqrt{5}\pm\sqrt{2}}{3}$$