慶應義塾大学　環境情報学部

I

(1) 4つの音を1回ずつ鳴らすため、$4! = 24$（通り）

(2) 同じ音を1度だけ連続して2回くり返す

鳴らし方は $_4P_3 \times 3 = 72$（通り）

よってチャイムの種類は、合計で $24 + 72 = 96$

(3) 同じ音を連続4回繰り返すチャイムは4通り、

よって可能なチャイムの種類は $96 + 4 = 100$（通り）

Ⅱ

(1)
$$y = \sin 3\theta - 3\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \sin\left(3\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2}\right) - 3\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \cos 3\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - 3\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 4\cos^3\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - 6\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore \ y = 4x^3 - 6x$$

(2) $0 \leq \theta < \pi$, つまり $-\frac{\pi}{6} \leq \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{5}{6}\pi$ のため,

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < x \leq 1$$

また, $\frac{dy}{dx} = 12\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ より

$\frac{dy}{dx} = 0$ のとき $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

x による y の増減は以下の通り.

x	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$\frac{dy}{dx}$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	$2\sqrt{2}$	↘	$-2\sqrt{2}$	↗	-2

また，$\displaystyle\lim_{x\to -\frac{\sqrt{3}}{2}+0}\left(4x^3-6x\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ のため，

y は

$x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，つまり $\theta=\dfrac{11}{12}\pi$ で最大値 $2\sqrt{2}$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，つまり $\theta=\dfrac{5}{12}\pi$ で最小値 $-2\sqrt{2}$ をとる

Ⅲ

(1) $L: y = mx + n$ とおく.

C, L の接点の x 座標を α, β $(\alpha < \beta)$ とする

このとき,

$$x^2(x-1)(x+2) - (mx+n) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

よって, 両辺の係数を比較し.

$$\begin{cases} 1 = -2(\alpha+\beta) \\ -2 = (\alpha+\beta)^2 + 2\alpha\beta \\ -m = -2\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ -n = \alpha^2\beta^2 \end{cases}$$

$\therefore \alpha+\beta = -\frac{1}{2}$, $\alpha\beta = -\frac{9}{8}$ であり

(これは $(\beta-\alpha)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{9}{8}\right) = \frac{19}{4} > 0$ のため
α, β は実数である)

$$m = \frac{9}{8}, \quad n = -\frac{81}{64}$$

よって L の方程式は.

$$y = \frac{9}{8}x - \frac{81}{64}$$

慶早進学塾

(2) 斜線部分の面積 S は.

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \left(x^2(x-1)(x+2) - \left(\frac{9}{8}x - \frac{81}{64} \right) \right) dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2 (x-\beta)^2 dx$$

$$= \frac{1}{30} (\beta - \alpha)^5$$

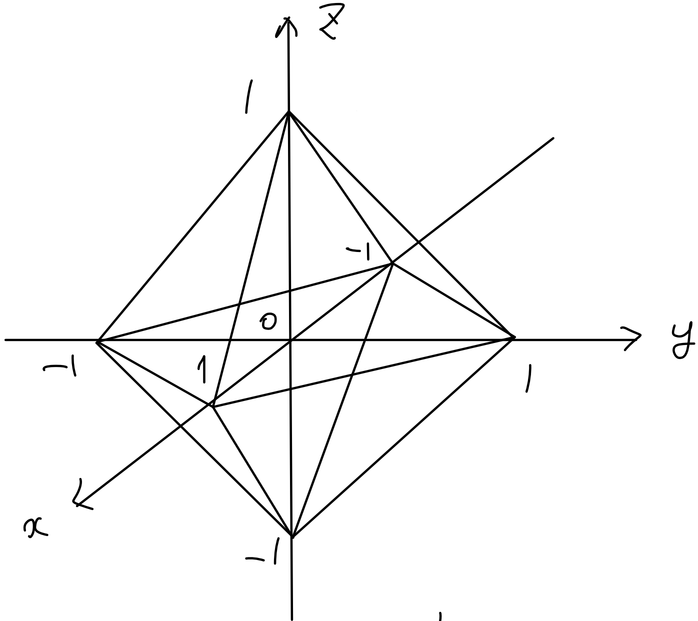
$$= \frac{1}{30} \left(\frac{\sqrt{19}}{2} \right)^5 \qquad (\because \beta > \alpha)$$

$$= \frac{361\sqrt{19}}{960}$$

慶早進学塾

IV

(1) この立体は以下のような正八面体.



よって, 体積は $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{4}{3}$

(2) $|x-a| + |y-a| + |z| \leqq 1$ が表す立体は

(1) の正八面体を x軸方向に a, y軸方向に a

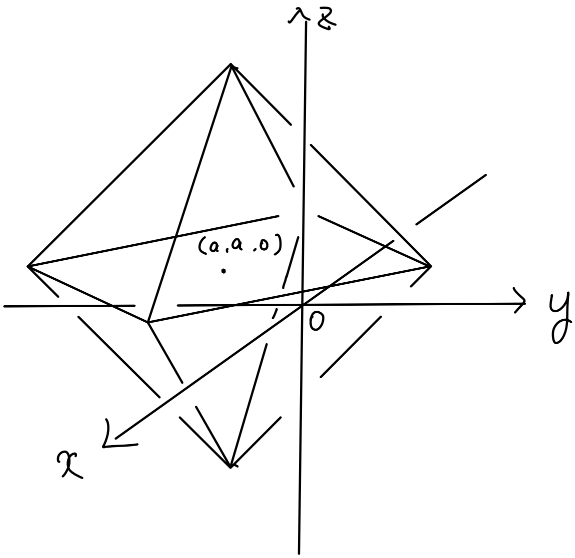
平行移動させたものである

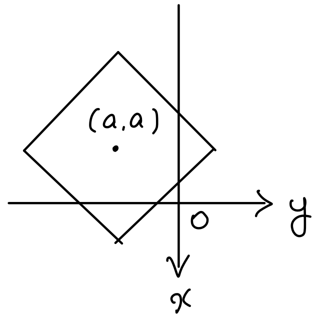
慶早進学塾

このため

(a) $a < -\frac{1}{2}$ のとき.

(上面図)

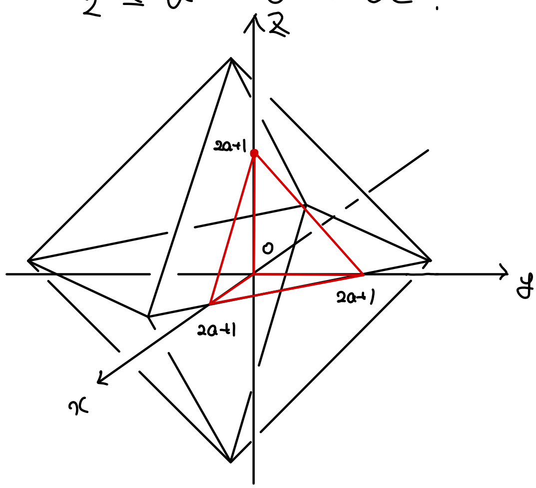


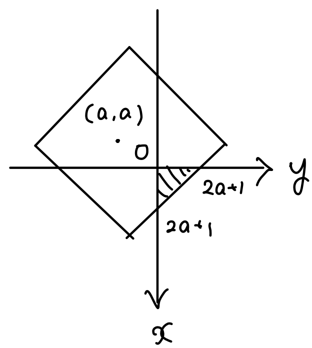


$V(a) = 0$

(b) $-\frac{1}{2} \le a < 0$ のとき.

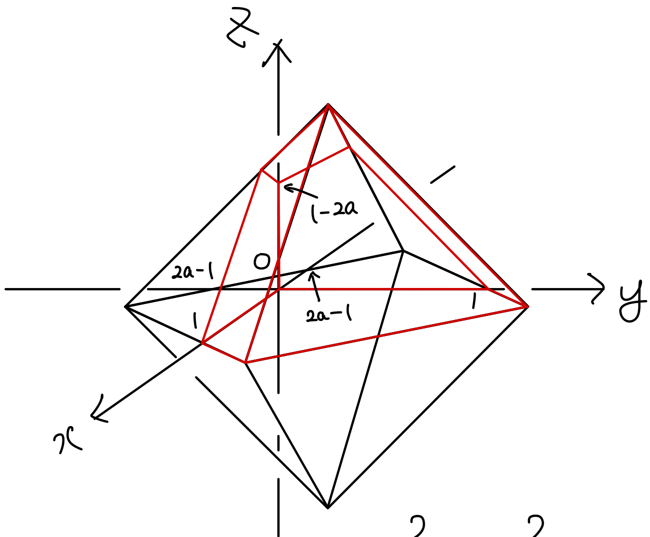
(上面図)

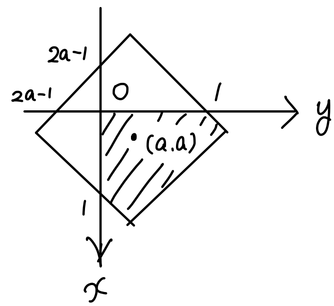




$V(a) = \frac{1}{6}(2a+1)^3$

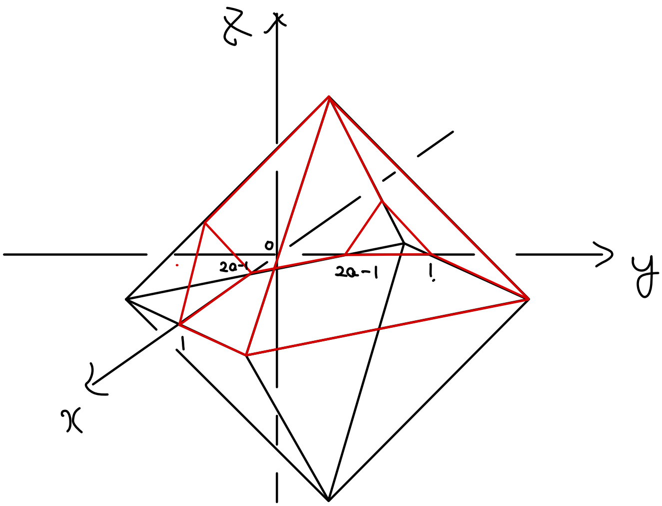
(c) $0 \leq a < \frac{1}{2}$ のとき

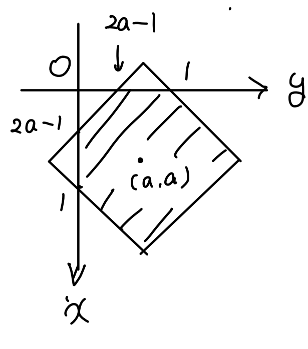




$$V(a) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(1-a)^3 + \frac{1}{6}(1-2a)^3$$

(d) $\frac{1}{2} \leq a < 1$ のとき.

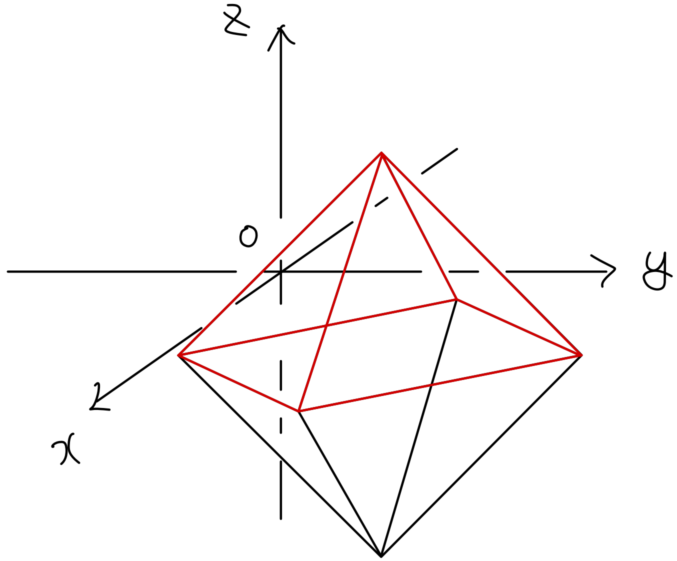




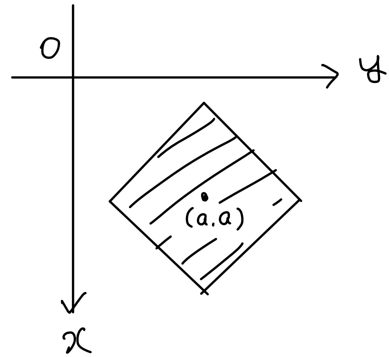
$$V(a) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(1-a)^3$$

慶早進学塾

(e) $1 \leq a$ のとき.



(上面図)



$$V(a) = \frac{2}{3}$$

以上より

(a) $a < -\frac{1}{2}$ のとき　$V(a) = 0$

(b) $-\frac{1}{2} \leq a < 0$ のとき　$V(a) = \dfrac{8a^3 + 12a^2 + 6a + 1}{6}$

(c) $0 \leq a < \frac{1}{2}$ のとき　$V(a) = \dfrac{-4a^3 + 6a + 1}{6}$

(d) $\frac{1}{2} \leq a < 1$ のとき　$V(a) = \dfrac{2a^3 - 6a^2 + 6a}{3}$

(e) $1 \leq a$ のとき　$V(a) = \dfrac{2}{3}$

V

(1) 手の出し方は全部で 3^3 通り

うち、1回目で勝者が決まるのは、$3 \cdot 3$ 通り

よって求める確率は $\dfrac{3 \cdot 3}{3^3} = \underline{\dfrac{1}{3}}$

また、同様に、2人が残る確率は $\dfrac{3 \cdot 3}{3^3} = \dfrac{1}{3}$

よって、あいこになる確率は $1 - \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$

このため、

ちょうど2回で決まる確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 3}{3^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \underline{\frac{1}{3}}$$

ちょうど3回で決まる確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \underline{\frac{5}{27}}$$

(2) 4人で行い、1回目で決まる確率は $\frac{4 \cdot 3}{3^4} = \frac{4}{27}$

2回目に、2人になる確率は $\frac{{}_4C_2 \cdot 3}{3^4} = \frac{2}{9}$

3人になる確率は $\frac{{}_4C_3 \cdot 3}{3^4} = \frac{4}{27}$

4人になる確率は $1 - \left(\frac{4}{27} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27}\right) = \frac{13}{27}$

以上より、2回で決まる確率は

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{2 \cdot 3}{3^2} + \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{3} + \frac{13}{27} \cdot \frac{4}{27} = \frac{196}{729}$$

VI

(1) $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$, $C=(0,0,1)$とする.

四面体 POBC の体積は,

$$\begin{cases} \triangle OBC を底面とみたとき, \dfrac{1}{6}p_x \\ \triangle PBC を底面とみたとき, \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\,l_x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

これが一致ため, $p_x=\dfrac{\sqrt{6}}{3}l_x$

同様にして,

$$p_x=\frac{\sqrt{6}}{3}l_x,\quad p_y=\frac{\sqrt{6}}{3}l_y,\quad p_z=\frac{\sqrt{6}}{3}l_z$$

(2) $\triangle ABC$ 上のラベルとしてあり得るのは,

$\{u\}$, $\{w\}$

$\{u,w\}$, $\{u,x\}$, $\{u,y\}$, $\{w,y\}$, $\{w,z\}$

$\{u,w,y\}$, $\{u,x,y\}$

$\{u,w,x,z\}$, $\{v,w,y,z\}$