慶應義塾大学

理工学部（2 月 12 日実施）

数学

ア	$(1,2)$	イ	$(t=)\ 1$
ウ	$(t=)-2$	エ	$a=0,2,3$
オ	-1	カ	$4+\sqrt{22}$
キ	-1	ク	x^3+4x^2+4x+1
ケ	$x+1$	コ	$-x-2$
サ	$\frac{4}{27}$	シ	$\frac{5}{6}$
ス	$n-1$	セ	$\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^k$
ソ	8	タ	$\frac{1}{2}$
チ	$\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}-\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)$	ツ	$\frac{3}{4}-\log 2$
テ	$(s=)\ a+b$	ト	$(t=)\ a-b$
ナ	$(\theta=)-\frac{\pi}{4}$	ニ	$4x^2+(2y-1)^2-1$
ヌ	$6+2\sqrt{5}$		

※ 2 (1), 4 (1) の解答（記述）は次頁に記載。

2.

(1) ＜ s, t の組について＞

$\alpha^2+3\alpha+3=0$ より $\alpha=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}$ という 2 つの可能性があるが，いずれの場合も

$$|\alpha+2|=\left|\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\right|=1,\ |\alpha+3|=\left|\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}\right|=\sqrt{3}$$

である。したがって $|(\alpha+2)^s(\alpha+3)^t|=1^s\cdot\sqrt{3}^t=\sqrt{3}^t$ となり，これと $(\alpha+2)^s(\alpha+3)^t=3$ より $\sqrt{3}^t=3$ でなければならない。これより $t=2$ がしたがう。よって

$$\left(\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)^s\left(\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}\right)^2=1$$

であり，両辺の偏角をとることで $\pm\frac{s\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3}=2k\pi$ (k：整数，複号同順)が成り立ち，複号がいずれの場合も $s=6k-1$ がしたがう。

以上より，条件をみたす (s,t) は

$$\underline{(s,t)=(6k-1,2)\quad(k:\text{整数})}$$

となる。■

4.

(1) $f(x)=\left(\text{右辺}\right)-\left(\text{左辺}\right)=\log(1+ax)-a\left(x-\frac{x^2}{4}\right)$ （ただし $x\geqq0$ ）とする。

この $f(x)$ を x で微分すると，

$$f'(x)=\frac{a}{1+ax}-a\left(1-\frac{x}{2}\right)=\cdots=\frac{ax(ax+1-2a)}{2(1+ax)}$$

となる。$0<a\leqq\frac{1}{2}$ に注意すると，$x\geqq0$ で最右辺の分母は正であり，分子の ax と $1-2a$ は 0 以上である。よって $f'(x)\geqq0$ なので，関数 $f(x)$ は広義単調増加とわかる。これと $f(0)=0$ より，任意の 0 以上の実数 x に対して $f(x)\geqq0$ がいえ，題意がしたがう。■