早稲田大学 基幹理工・創造理工・先進理工学部（2/14）

数学

[I]

(1)

$\alpha+\beta+\gamma=0$ より $\gamma=-(\alpha+\beta)$ であり、この両辺の絶対値の二乗を計算すると $|\gamma|^2=|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta+|\beta|^2$ を得る。$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ であったから $1=1+\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta+1$ となり、整理して $\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta+1=0$ を得る。

この両辺を $\beta\bar{\beta}(=1)$ で割ると $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}+1=0$ となり、さらに両辺に $\frac{\alpha}{\beta}$ をかけて

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\frac{\alpha}{\beta}+1=0$ となる。これを $\frac{\alpha}{\beta}$ の二次方程式とみて解くと $\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ を得る。

$\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\arg(\alpha-\beta)=\pm\frac{2\pi}{3}$ であることがわかり、同様の計算により $\arg(\beta-\gamma)=\pm\frac{2\pi}{3}$ および $\arg(\gamma-\alpha)=\pm\frac{2\pi}{3}$ もわかる。複素数平面上のこれらの 3 点は互いに異なり、絶対値はどれも 1 であり、かつ偏角の差の大きさが $\frac{2\pi}{3}$ であるため、複素数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ に対応する 3 点は正三角形をなす。（特に重心は原点にあり、一辺の長さは $\sqrt{3}$ である。）

(2)	3
(3)	0

[II]

(1)	$y=tx-\frac{1}{2}t^2$
(2)	$x+yt-t-\frac{1}{2}t^3=0$
(3)	$Y=\frac{1}{2}t^2+\frac{d}{\sqrt{1+t^2}}$
(4)	$0<d\leqq 1$ のとき極小値 d $1<d$ のとき極小値 $\frac{3}{2}d^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}$

[III]

※ $t=0$ で $h(t)=h(0)=0$ とする。

(1)

水位の上昇速度は $h'(t)$ であるため、単位時間あたりに加えられる水量 v について $v=h'(t)\cdot\pi\{g(y)\}^2=h'(t)\cdot\pi\left\{g\left(h(t)\right)\right\}^2$ が成り立つ。いま $h'(t)$ は一定であるが、これを a （a は正の定数）とおくと $v=a\cdot\pi\left\{g\left(h(t)\right)\right\}^2$ となる。$g(y)>0$ に注意すると $g\left(h(t)\right)=\sqrt{\frac{v}{\pi a}}$ となり、$h(t)$ は 0 以上の任意の実数値をとるため、 $g(y)$ は定数関数といえる。

(2)	$h(t)=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{2vt}{\pi}\right)$

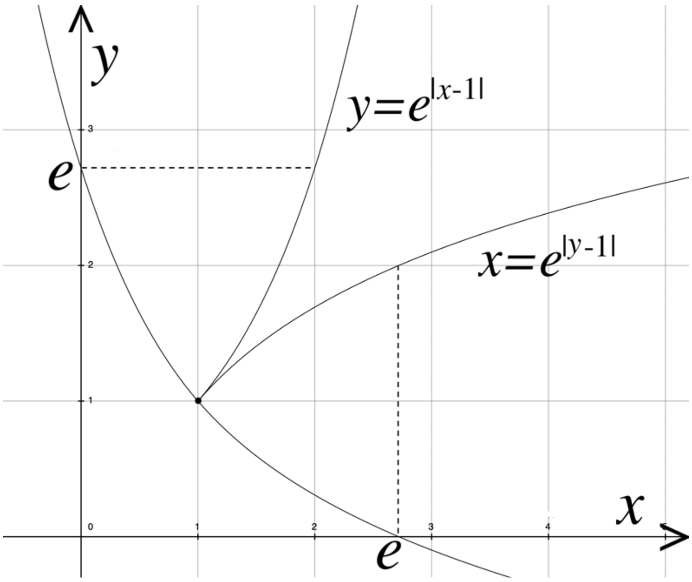
[IV]

(1)	$\frac{1}{1+\beta}$
(2)	β
(3)	$(a,b)=(1010,1010)$

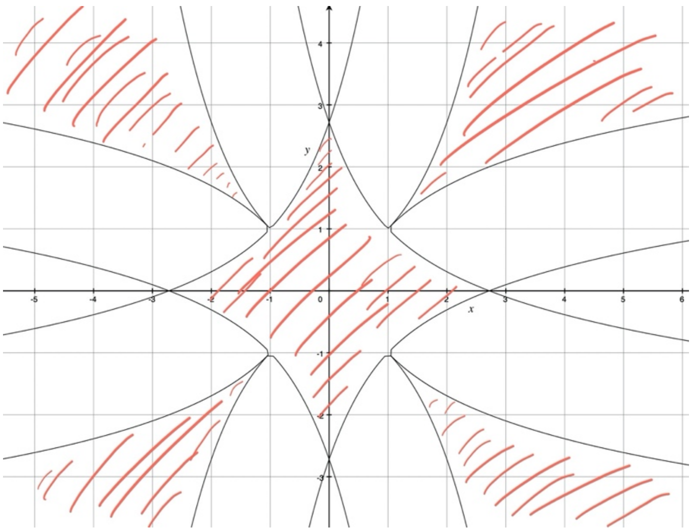
慶早進学塾
Attend Cram School to Keio&Waseda

[V]

(1)



(2)



境界を全て含む。

(3)	有限の面積をもたない。
(4)	有限の体積をもたない。

＜補足＞
(2) 以降は出題の誤りの可能性がある。

※ D を上図中央の領域（4 つのグラフで「囲まれる」領域）とした場合の答えは以下の通り。

(3)’	$8e-12$
(4)’	$(e^2+4e-11)\pi$

慶早進学塾
Attend Cram School to Keio & Waseda